

第 2 篇 电磁学与电路基础

主 编 丁润涛

执 笔 王金刚

杨兆选

主 审 杨 山

目 录

第1章 电磁学基础

1 电场和磁场的基本物理量	2-1
1.1 电场强度与电力线	2-1
1.2 极化强度	2-2
1.3 电位移	2-3
1.4 磁感应强度与磁力线	2-3
1.5 磁场强度	2-3
1.6 电位	2-4
1.7 标量磁位与矢量磁位	2-4
2 电磁场的基本定律	2-4
2.1 高斯定律	2-4
2.2 安培环路定律	2-5
2.3 电磁感应定律	2-5
2.4 全电流定律	2-5
2.5 麦克斯韦方程组	2-6
3 电容与电感	2-7
4 电磁场中的能量、力及某些效应	2-10
4.1 恒定电磁场中的能量	2-10
4.2 恒定电磁场中的力	2-10
4.3 交变磁场中的磁滞与涡流	2-11
4.4 交变磁场中的介质损耗、集肤效应与邻近效应	2-11

第2章 电路基础

1 电路与电路定律	2-12
1.1 电路的基本概念	2-12
1.2 欧姆定律	2-17
1.3 基尔霍夫第一、第二定律	2-17
1.4 电能与电功率	2-17
2 电路基本分析方法	2-18
2.1 支路电流法	2-18
2.2 支路电压法	2-19
2.3 网孔分析法	2-19
2.4 节点分析法	2-20
2.5 割集分析法	2-20
2.6 回路分析法	2-22

3 网络定理	2-23
3.1 叠加定理	2-23
3.2 置换定理	2-23
3.3 戴维南定理	2-24
3.4 诺顿定理	2-24
3.5 特勒根定理	2-25
3.6 互易网络	2-26
4 线性动态电路	2-27
4.1 动态电路	2-27
4.2 动态电路的各种响应	2-27
4.3 三要素法	2-27
5 正弦稳态分析	2-29
5.1 正弦稳态响应	2-29
5.2 正弦量的相量表示	2-29
5.3 电路的相量模型	2-30
5.4 正弦稳态电路的相量分析	2-31
5.5 正弦稳态电路的功率	2-32
5.6 谐振与频率特性	2-33
5.7 三相正弦交流电路	2-41
5.8 电路的等效变换	2-43
6 二端口网络	2-47
6.1 二端口网络的参数和方程	2-47
6.2 二端口网络的等效电路	2-47
6.3 二端口网络的连接和参数	2-54
6.4 网络函数	2-55

第3章 信号与系统分析

1 信号与系统	2-58
1.1 信号	2-58
1.2 系统	2-59
2 连续系统的时域分析	2-60
2.1 系统响应的分解特性	2-60
2.2 冲激响应与阶跃响应	2-60
2.3 卷积积分	2-60
2.4 系统的零状态响应	2-61
2.5 杜阿密尔积分	2-61
2.6 卷积表	2-61
3 连续系统的傅里叶分析	2-62

3.1 周期信号的傅里叶级数	2-62	5 离散时间信号与系统	2-89
3.2 傅里叶变换及变换表	2-67	5.1 离散时间信号与抽样定理	2-89
3.3 连续系统的傅里叶分析	2-78	5.2 离散系统的时域分析	2-90
3.4 信号通过线性系统的无失真传输 条件	2-79	5.3 Z变换	2-93
4 连续系统的复频域分析	2-79	5.4 离散系统的Z域分析	2-97
4.1 拉普拉斯变换	2-79	6 系统的模拟与稳定性	2-97
4.2 拉普拉斯变换的性质	2-79	6.1 线性系统的信号流图表示与模拟	2-97
4.3 拉普拉斯反变换	2-80	6.2 连续系统的稳定性	2-100
4.4 拉普拉斯变换表	2-81	6.3 离散系统的稳定性	2-101
4.5 复频域(s域)分析	2-87	参考文献	2-102

本篇主要介绍电子工程师常用的基本理论和基本分析方法。前两章分别为电磁学和电路分析的基本理论。第三章为信号与系统的基本概念和分析方法。

在电子学领域中，常常利用通信系统、控制系统、计算机系统与指挥系统进行信号的传输与处理。通常，组成通信、控制与计算机系统的主要部件中包括大量的、多种类型的电路。电路也称为网络。当研究一般性的抽象规律时多用网络一词，而研究一些指定的具体问题时多称之为电路。系统可以认为是比网络更复杂、规模更大的组合体。然而，由于大规模集成化技术的发展以及各种复杂系统部件的直接采用，使电路、网络、系统这些名词的区分发生了困难。通常勿需严格区分各名词之间的差异。信号、网络（或电路）与系统之间有着十分密切的关系。离开了信号，网络与系统将失去意义。信号作为待传输消息的表现形式，可以看作运载消息的工具，而网络或系统则是为传送信号或对信号进行加工处理而构成的某种组合。系统所关心的是对于给定信号形式与传输、处理的要求，系统能否与其相匹配，它应具有怎样的功能和特性。

系统与网络理论研究，包括系统分析与系统综

合（网络分析与网络综合）两个方面。在给定系统的条件下，研究系统对于输入激励信号所产生的输出响应，这是系统分析。系统综合则是按某种需要先提出对于给定激励的响应，而后根据此要求设计（综合）系统。分析与综合两者关系密切，但又有各自的体系和研究方法。一般地说，系统分析是系统综合的基础。

众所周知，信号与系统的理论一直在不断地演变和发展着，以响应各种新问题、新技术和新机遇的挑战。随着技术的进步和超大规模集成电路的应用，使得更复杂的系统和信号处理技术的实现成为可能。我们定会看到，信号与系统的分析方法和概念能够应用到更广泛的领域中去。值得指出的是，在近几年内，连续时间和离散时间信号与系统变得日益交织在一起，而在应用上也日益结合。其主要原因是由于高速数字计算机和高密度器件制造技术的飞速发展，使用等间隔采样信号表示和处理连续时间信号具有越来越多的优点。

本篇以通信系统和控制系统的某些问题为背景，给出信号（连续与离散）经系统（连续与离散）传输或处理的一般规律，着重基本概念和基本分析方法。

第1章 电磁学基础

1 电场和磁场的基本物理量

1.1 电场强度与电力线

1. 电场强度 电场强度是描述电场特性的基本物理量，电场强度是一个矢量。电场是伴随电荷产生的。点电荷的电场强度，定义为作用在电场中的单位正电荷的力，可以表示为

$$E_a = \frac{F_{ab}}{Q_b} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} r_1 \quad (\text{V/m})$$

式中 E_a 为点电荷 Q_a 产生的电场的电场强度 (V/m)； Q_b 为位于电场中的试探单位正电荷 (C)； F_{ab} 为试探单位正电荷在电场中受到的力 (N)； Q_a 为产生点电荷电场的点电荷 (C)； ϵ_0 为真空介电常数， $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ ； r 为点电荷 Q_a 与试探电荷 Q_b 之间的距离 (m)； r_1 为是由 Q_a 指向 Q_b 的单位矢

量。

若电场是由多于 1 个电荷产生的，可由电场强度的叠加原理求得。

2. 电场强度的叠加原理 若电场是由几个电荷 (q_1, q_2, \dots, q_n) 产生的，电场中某点处的电场强度 E 等于每个电荷单独作用产生的电场强度的矢量和，即

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

3. 静电场中的导体 导体内部任一点的电场强度为零，导体表面上任一点的电场强度方向一定垂直于导体表面，整个导体表面是一个等位体。

4. 电力线 是电场内画出的假想曲线，它形象地描述了电场强度的分布情况。在电场中，电力线起于带正电荷的物体，终止于带负电荷的物体，电力线既不闭合，也不中断，也不会相交；电力线

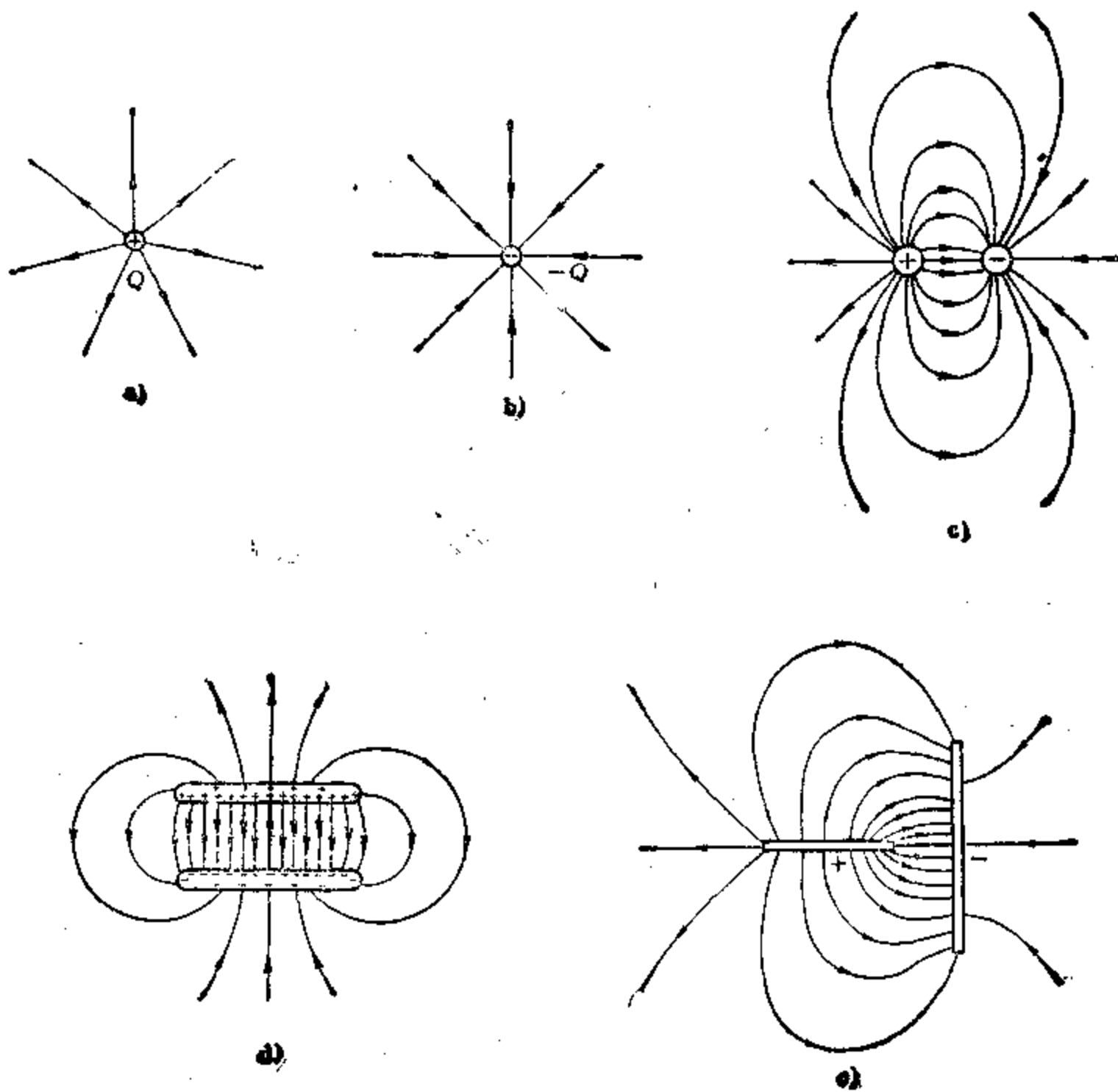


图 2-1-1 电场中的电力线

a) 带正电荷物体 b) 带负电荷物体 c) 分别带正负电荷物体 d) 平行带电薄板 e) 互相垂直带电薄板

上任何一点的切线方向就是该点电场强度方向。电力线的密度表示场强的大小。电场中电力线分布情况见图2-1-1所示。

1.2 极化强度

在外电场的作用下,电介质内部量值相等的正、负电荷的宏观作用中心作极其微小的位移,形成电偶极子。这种现象称为电介质的极化现象。电偶极子的特性可以用电偶极子的电偶极矩 p 表示,可以定义为:

$$p = qh \quad (\text{C} \cdot \text{m})$$

式中 q 为电荷数量(C); h 为由负电荷指向正电荷的有向距离(m)。

在电介质中,单位体积内由于极化而出现的电矩矢量之和定义为电极化强度 P ,可表示为

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum p}{\Delta V} \quad (\text{C}/\text{m}^3)$$

电介质内部电场,是由介质中的束缚电荷的电场与外部电场的合成,在各向同性的线性电介质中,极化强度 P 与合成电场强度 E 成正比关系,可表示为

$$P = \chi E \quad (\text{C}/\text{m}^3)$$

式中 χ 为比例常数,常称之为电极化率; E 为合成电场强度。

许多电介质在极化过程中,当受到外电场作用时,产生电介质的极化;当外电场作用消失时,极化同时消失。当外电场作用消失后,而极化不消失者,称为驻极体。

1.3 电位移

电位移 D ，也称为电通密度，它是一个矢量。电位移 D 是描述电场特性的物理量之一。电位移 D 定义为下列两矢量之和，其一是表示真空中电场特性的矢量 $\epsilon_0 E$ ；另一是表示在观察点处介质极化能力的电极化强度矢量 P 。其表示为：

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (\text{C/m}^2)$$

在真空中， $P = 0$ ，所以电位移

$$D = \epsilon_0 E \quad (\text{C/m}^2)$$

1.4 磁感应强度与磁力线

1. 磁感应强度 磁感应强度 B 是表示空间中某一点磁场特性的物理量，是表示场的力特性的物理量。定义为单位正电荷以单位速度向与磁场方向相垂直的方向运动时受到的磁场力，可表示为：

$$f = q(v \times B)$$

式中 B 为磁感应强度(T)。

磁感应强度是一个矢量。其方向可以根据右手螺旋定则确定。磁场作用于运动电荷的力 f ，电荷的运动方向 v 及磁感应强度 B 的方向间的关系如图 2-1-2 所示。

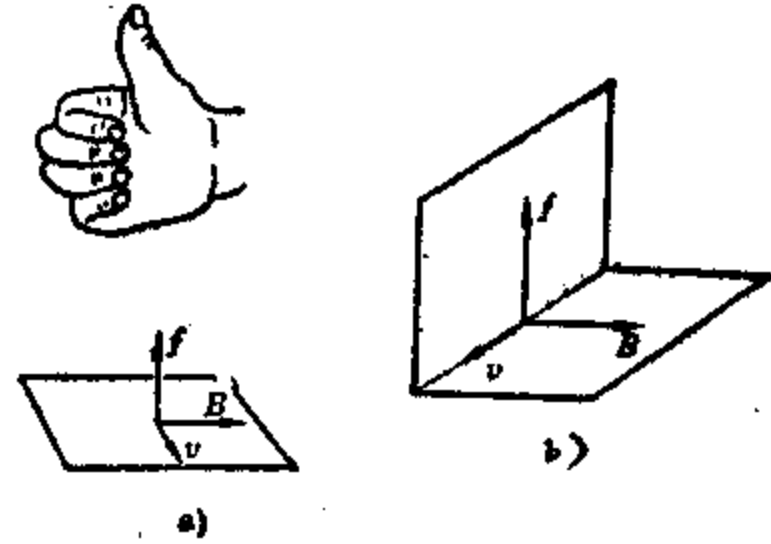


图 2-1-2 f 、 v 、 B 间的方向关系
a) f 、 v 、 B 方向关系的右手定则
b) f 、 v 、 B 方向关系

2. 磁力线 磁力线是描述磁场中磁感应强度分布情况的曲线，见图 2-1-3。磁场中任何一点磁力线的切线方向，就是该点磁感应强度 B 的方向；磁力线的疏密程度正比于 B 的大小。磁力线是环绕电流的闭合曲线，既无起点，也无终点，也不会中断和相交。

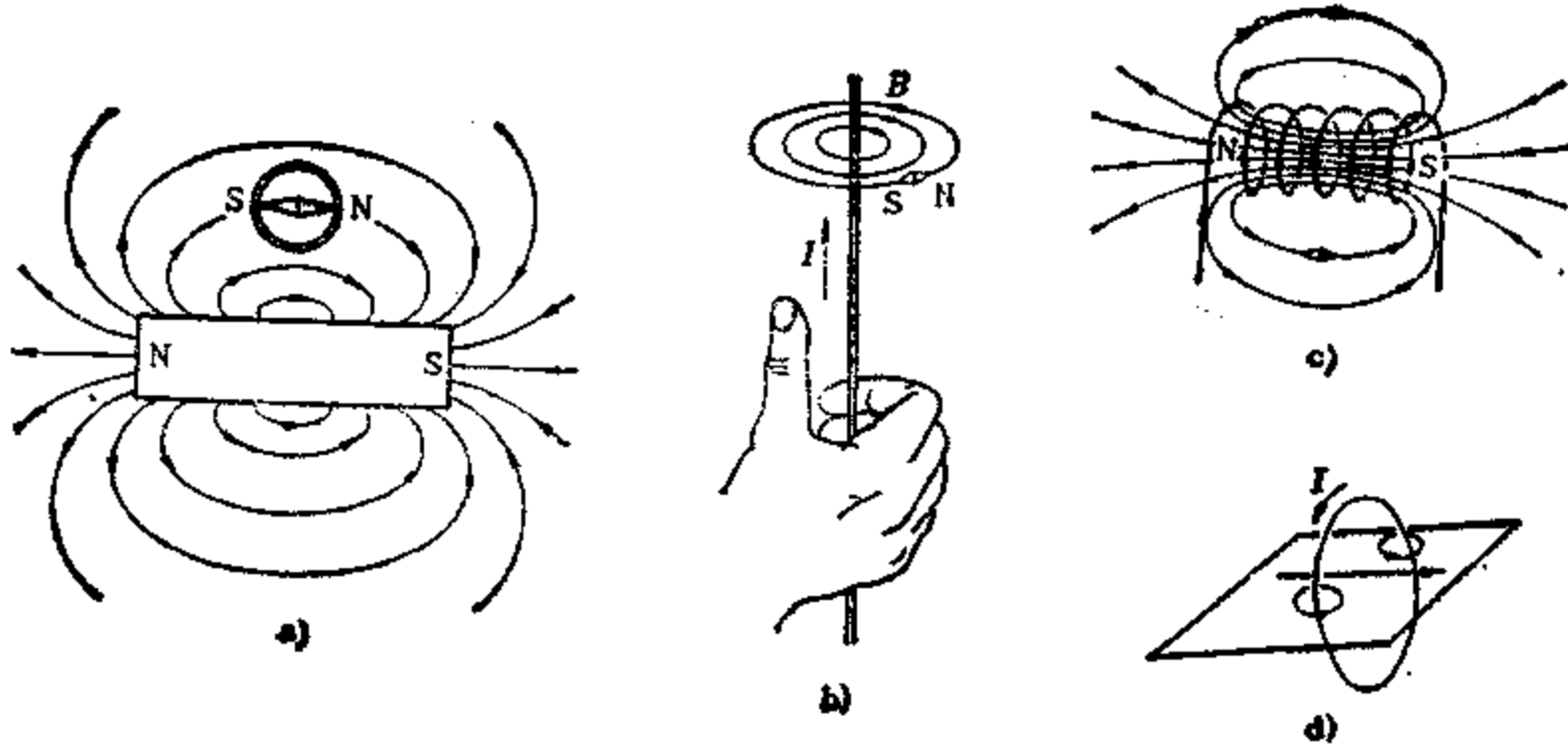


图 2-1-3 磁场的磁力线
a) 磁棒周围的磁力线 b) 载流直导线周围的磁力线 c) 螺线管周围的磁力线
d) 环形导线周围的磁力线

1.5 磁场强度

磁场强度 H 是描述磁场特性的物理量，它与磁感应强度的关系可以表示为：

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \quad (\text{A/m})$$

式中 μ_0 为真空导磁系数， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (\text{H/m})$ ；

M 为磁化强度(A/m)。

对于各向同性的导磁物质，磁场强度 H 与磁感应强度 B 的关系可表示为：

$$H = \frac{B}{\mu} \quad (\text{A/m})$$

式中 μ 为磁导率， $\mu = \mu_0 \mu_r$ ， μ_r 称为相对磁导率。

在各向同性的抗磁物质和顺磁物质中，磁化强度 M 与磁场强度 H 是成正比的，可以表示为

$$M = \chi_m H \quad (\text{A/m})$$

式中 χ_m 为磁化率，无量纲。抗磁物质的磁化率 $\chi_m < 0$ ，与温度无关；顺磁物质的磁化率 $\chi_m > 0$ ，与绝对温度成反比。

对于铁磁物质， M 和 H 的关系一般是非线性的。

1.6 电位

电位 U 是表征电场特性的物理量，它是标量，单位是伏特 (V)。在电场中单位正电荷从 P_0 点移到 P 点时，电场力所做的功

$$U_{P,P_0} = - \int_{P_0}^P E dl = U_P - U_{P_0}$$

U_{P,P_0} 称为 P_0 点到 P 点的电位差 (电压)。如果选定 P_0

点为参考点 (电位为零)，则 $U_P = - \int_{P_0}^P E dl$ 称为

P 点的电位。 U_P 只与 P 点的位置有关，与所取的积分路径无关。电位的参考点常取大地或无限远点。

电场强度 E 与电位梯度 (grad U) 的关系可以用下式表达：

$$E = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k \right)$$

$$= - \frac{\partial U}{\partial n} n^{\circ} = - \text{grad}U \text{ (V)}$$

式中 n° 表示该点电位增长率最大的方向的单位矢量； n 为该方向的距离 (m)； i 、 j 、 k 是直角坐标系中 x 、 y 、 z 轴上的单位矢量， $\partial U / \partial x$ 、 $\partial U / \partial y$ 、 $\partial U / \partial z$ 分别为电压在 x 、 y 、 z 轴三个方向的变化。

电场中电位相等的各点所组成的曲面称为等位面，它与电力线处处正交。

1.7 标量磁位与矢量磁位

1. 标量磁位 是描述磁场特性的一个物理量。磁场中某一点 P 相对于参考点 Q 的磁位 U_m ，即 P 点到 Q 点的磁压 $U_{m,PQ}$ ，可表示为：

$$U_{m,P} = U_{m,PQ} = \int_P^Q H \cdot dl \quad (\text{A})$$

在无电流分布区域内，即 $\delta = 0$ ，磁位与积分路径无关，磁场强度 H 与标量磁位的关系为

$$H = - \text{grad}U_m$$

2. 矢量磁位 矢量磁位 A 是表征磁场特性的物理量，它既可以用于无电流区域，又可以用于有

电流区域。矢量磁位与磁感应强度 B 的关系如下式：

$$B = \text{rot}A$$

A 的单位是 Wb/m

2 电磁场的基本定律

2.1 高斯定律

在电场中，不论介质如何分布，由任一闭合面穿出的电位移矢量 D 的通量，只与面内自由电荷有关，而与电介质无关，即

$$\oint D d\sigma = \Sigma q$$

但是电介质的分布改变， D 的分布也改变；只要闭合面内所带电荷量不变，则 D 通量总数不变。

2.2 安培环路定律

在磁场中，不论导磁介质如何分布，磁场强度矢量 H 沿任一闭合路径的线积分等于穿过该积分回路所限定面积的电流 i 的代数和，即

$$\oint H dl = \Sigma i$$

如果电流的方向和积分回路的绕行方向符合右手螺旋关系，则上式中的电流为正，否则为负。 H 的分布与电流、导磁介质的分布有关。

2.3 电磁感应定律

在磁场中，当穿过任一闭合回路中的磁通量发生变化时，在回路中产生的感应电动势 e 等于磁通量变化率的负值，可表示为

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{V})$$

式中，感应电动势 e 的正方向和磁通正方向应符合右手螺旋关系，如图 2.1-4 所示。

与回路相交链的磁通的变化可以是回路相对于磁场的相对运动引起的，也可以是回路不动，磁通随时间的变化，也可以是两者同时变化从而引起的磁通的变化。

2.4 全电流定律

在电磁场中，传导电流、运流电流 (徙动电流) 和位移电流三者合称为全电流。

1. 传导电流 是由电荷在导电介质中有规则地运动形成。传导电流的密度

$$\delta_c = \rho v \quad (\text{A/m}^2)$$

式中 ρ 为电荷的体密度 (C/m^3)； v 为电荷运动的平均速度 (m/s)。

传导电流服从欧姆定律，即

$$\delta_c = \gamma E$$

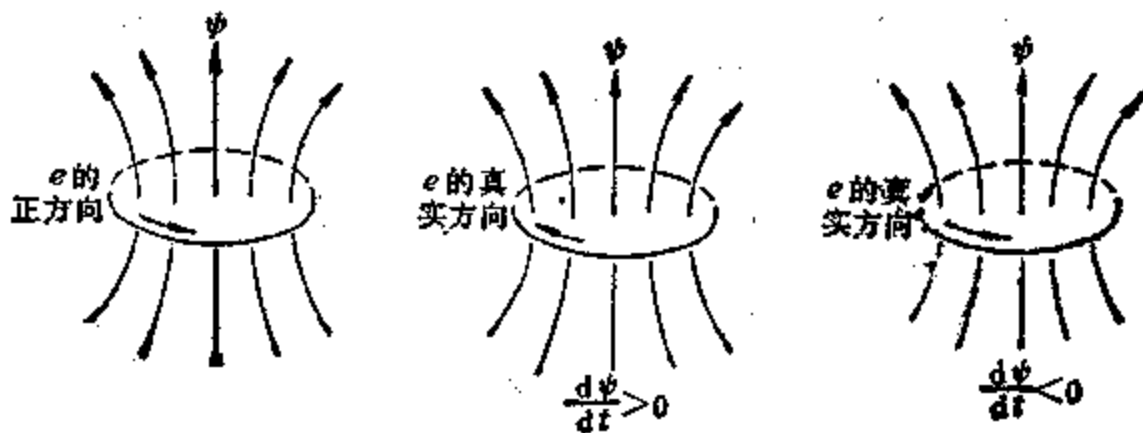


图 2-1-4 用右手定则表示 e 和 Φ 的正方向的关系

式中 γ 为导体的电导率 (S/m); E 为电场强度 (V/m)。

2. 运流电流 是由宏观带电物体或带电粒子在真空中或稀薄气体中运动形成。运流电流不服从欧姆定律。运流电流密度

$$\delta_v = \rho v \quad (\text{A/m}^2)$$

式中 v 为带电物体或带电粒子的运动速度; ρ 为电荷的体密度 (C/m³)

3. 位移电流 是通过任一曲面的电位移 (即电感应强度) 通量随时间的变化率称为位移电流。

位移电流的密度

$$\delta_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{A/m}^2)$$

式中 D 为电位移矢量 (C/m²)。 δ_d 的方向与 $\partial D / \partial t$ 的方向一致。

一般情况下, 位移电流很小, 只有在电场变化频率特别高的情况下, 导体中的位移电流才可能显得重要而必须加以考虑。

4. 全电流定律 磁场强度 H 沿任一闭合路径的线积分等于这个路径为边界所限定的曲面中通过的全电流, 称之为全电流定律, 表示为

$$\oint_l H \cdot dl = \int_s \left(\delta + \frac{\partial D}{\partial t} \right) d\sigma$$

式中 δ 为等于传导电流密度 δ_c 或等于运流电流密度 δ_v , 而不能是 δ_c 与 δ_v 之和; $\partial D / \partial t$ 为电位移矢量变化率亦称, 位移电流密度 $\delta_d = \partial D / \partial t$ 。

对安培环路定律的推广, 磁场强度 H 沿任一闭合路径的线积分等于以这个路径为边界所限定的曲面中通过的全电流, 即

$$\oint H \cdot dl = \Sigma i = \int_s (\delta_c + \delta_v + \delta_d) d\sigma$$

上式表明, 磁场不仅由传导电流、运流电流产生,

而且变动的电场也要产生磁场。

2-5 麦克斯韦方程组

在电磁场中以 E 、 D 、 B 、 H 分别表示电磁场中的电场强度、电位移、磁感应强度及磁场强度各矢量, 用 e 、 q 和 i 分别表示感应电动势、电荷及电流。在任何电磁场中, 可以表征其基本性质的方程组的积分形式是

$$\oint H \cdot dl = \int_s (\delta_c + \delta_v + \delta_d) d\sigma = \Sigma i$$

$$\oint E \cdot dl = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} d\sigma = e$$

$$\oint B \cdot d\sigma = 0$$

$$\oint D \cdot d\sigma = \Sigma q$$

称为麦克斯韦方程组, 其相应的微分形式为

$$\text{rot} H = \delta + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2-1-1)$$

$$\text{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2-1-2)$$

$$\text{div} B = 0 \quad (2-1-3)$$

$$\text{div} D = \rho \quad (2-1-4)$$

式中 δ 表示 δ_c 或 δ_v 。

方程式 (2-1-1) 表示同一场点上的磁场强度的旋度与电流密度的关系, 即某一场点上电位移矢量随时间的任何变化 (即在该点产生的位移电流) 像传导电流一样, 在该点引起磁场的旋涡, 即产生有旋磁场。

方程式 (2-1-2) 表示磁场随时间的任何变化 $\left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)$, 将在同一点上产生电场的旋涡, 即产生有旋电场。

方程式 (2-1-3) 表示磁场连续性原理。

方程式 (2-1-4) 表示电场强度的来源和自由电

荷密度的关系。

麦克斯韦方程组表明：一个变动的电场总是伴随着一个变动的磁场；一个变动的磁场总是伴随着一个变动的电场，介质中的任何扰动都将以有限的速度向空间传播，形成电磁波，其速度约为 3×10^8 m/s。

3 电容与电感

1. 电容 电容 C 是宏观地表征两导体间电介质特性的参量，电容只和导体的形状、尺寸、相互间距离及介质的特性 (ϵ 的大小) 有关。两金属导体间的电容

$$C = \frac{Q}{U} \quad (\text{F})$$

式中 Q 为两导体分别带有的正、负电荷量 (C); U 为两导体间的电压 (V); C 是 Q/U 之比的绝对值。

孤立导体的电容是当组成电容的两导体之一移至无穷远点时，该导体的电荷量与其电位之比值。

只要介质是线性的， C 就是常数，单位是法拉 (F)。

2. 电感 电感可分为两类：自感和互感。

自感 L 是表征一个线圈的电流和导磁性能的参量，自感只与线圈的几何形状、介质的导磁特性有关，自感与电容相同永远是正值，可以表示为

$$L = \frac{N\Phi(t)}{i(t)} = \frac{\psi(t)}{i(t)} \quad (\text{H})$$

式中 N 为线圈的匝数，无量纲； $\Phi(t)$ 为与线圈相交链的磁通 (W_b)； $\psi(t)$ 为线圈的磁链 (W_b)； $i(t)$ 为流过线圈的电流。

互感 M 是表征两个线圈及其间导磁物质特性的参量，互感只和两个线圈的几何形状、相对位置及其周围介质的特性有关，线圈 2 对线圈 1 的互感

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2} \quad (\text{H})$$

式中 ψ_{12} 为互感磁链，是由线圈 2 中产生的磁通与线圈 1 相交链的磁链； i_2 为线圈 2 中的电流。

同理，得到线圈 1 对线圈 2 的互感

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} \quad (\text{H})$$

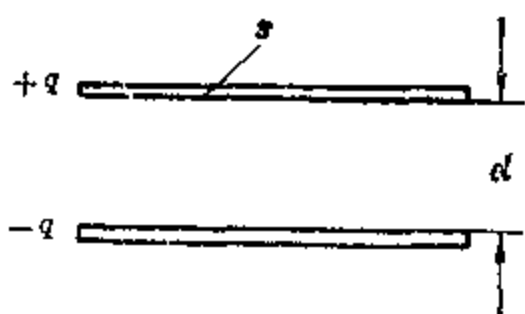
可以证明： $M_{12} = M_{21} = M$ 。

如果导磁物质是线性的，则 L 和 M 都是常数；否则 L 和 M 都是随 i 或 ψ 而改变的变量。互感的作用也可以推广到多个线圈互相间有磁链相交链的情况。 M 与 L 一样，均为正值。

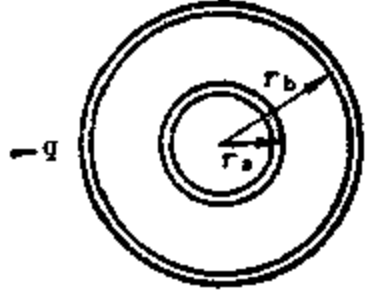
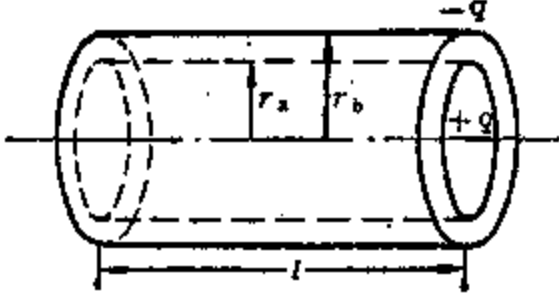
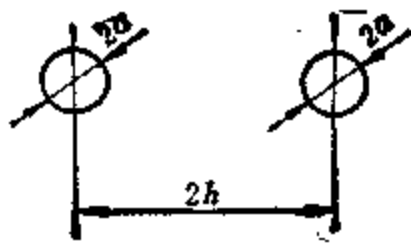
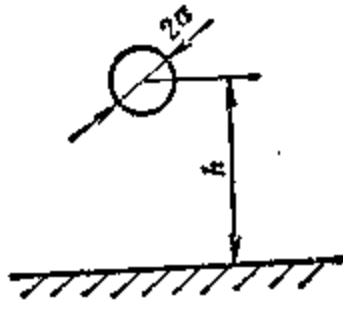
关于两个线圈间的互感 M 的计算问题，见第 2 章。

3. 几种典型结构的电容，电感的计算公式见表 2-1-1 及表 2-1-2。

表 2-1-1 几种典型结构的电容计算公式

电 容	结构图形	电 容 C	说 明
平板电容		$C = \frac{\epsilon s}{d} \quad (\text{F})$	<p>s—极板面积 (m^2)</p> <p>d—极板间的距离 (m), 且远小于边长尺寸</p> <p>ϵ—介电常数 (F/m)</p>

(续)

电 容	结构图形	电 容 C	说 明
球形电容		$C = \frac{4\pi\epsilon r_a r_b}{r_b - r_a} \text{ (F)}$ <p>当 $r_b \rightarrow \infty$ 时, 即为孤立球形导体的电容</p> $C = 4\pi\epsilon r_a \text{ (F)}$	r_a, r_b — 内球外表面与外球内表面的半径 (m)
圆柱形电容		$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_b}{r_a}} \text{ (F)}$	l — 电容器长度 (m) r_a, r_b — 分别为内柱外表面与外柱内表面的半径 (m)
两输电线间的电容 (地面影响忽略不计)		$C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left[\frac{k}{a} + \sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2 - 1} \right]} \text{ (F)}$ <p>$a \ll k$ 时</p> $C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left(\frac{2k}{a} \right)} \text{ (F)}$	l — 输电线长度 (m) $2k$ — 导线轴线间的距离 (m) a — 导线的半径
单极架空输电线的对地电容		$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left[\frac{h}{a} + \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} \right]} \text{ (F)}$ <p>$a \ll h$ 时</p> $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left(\frac{2h}{a} \right)} \text{ (F)}$	h — 导线轴线与地面的距离 (m) a — 导线的半径 (m) l — 输电线长度 (m)

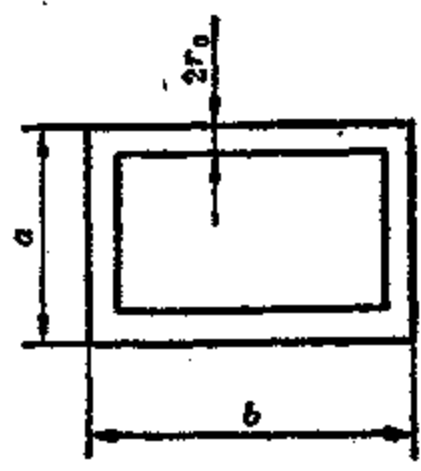
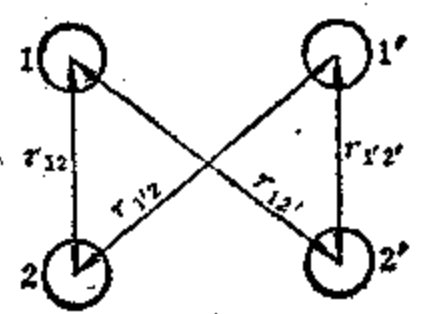
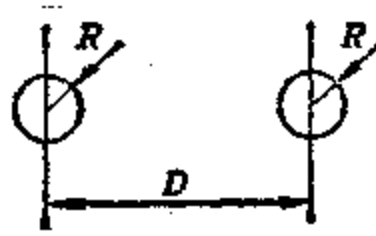
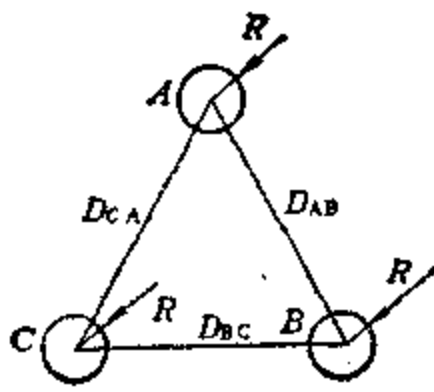
(续)

电 容	结构图形	电 容 C	说 明
三相输电线间的电容 (地面影响忽略不计)		每相电容 $C_{\phi} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{d}{a}\right)} \text{ (F)}$ 其中 $a \ll d$	d —导线轴线间距离的几何平均值 (m), $d = \sqrt[3]{d_{12}d_{23}d_{31}}$

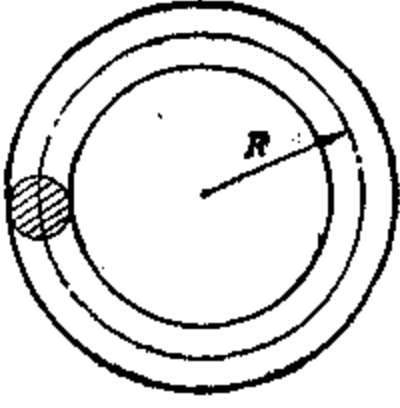
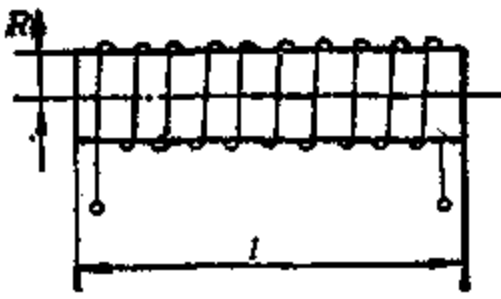
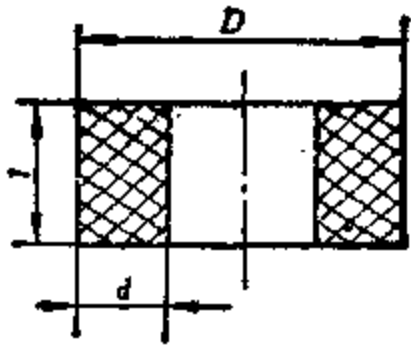
表 2-1-2 几种典型结构的电感计算公式

电 感	结构图形	电 感 L	说 明
圆形截面直导线段的自感		$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{l + \sqrt{l^2 + r_0^2}}{r_0} - \frac{\sqrt{l^2 + r_0^2}}{l} - r_0 \right) \text{ (H)}$	μ_0 —真空磁导率 (H/m) $r_0 \ll l$ $l \approx 1$
同轴电缆的电感		$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\frac{\mu}{4} + \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \text{ (H)}$	l —电缆长度 μ —磁导率 (H/m) 电缆外层导体厚度忽略不计
两平行直导线段间的互感		$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{D} - 1 \right) \text{ (H)}$	导线直径 $\ll D$ $D \ll l$

(续)

电 感	结构图形	电感 L	说 明
矩形线圈的自感		$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[a \ln \frac{2ab}{r_0(a+d)} + b \ln \frac{2ab}{r_0(b+d)} - 2(a+b-d) \right] + \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{a+b}{4} \right) \text{ (H)}$	r_0 —圆形导线半径 $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ $r_0 \ll a$ $r_0 \ll b$
两对输电线间的互感		$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{12} r_{1'2}}{r_{12} r_{1'2'}} \text{ (H)}$	l —输电线长度 导线半径 \ll 线间距离 线间距离 $\ll l$
两线制输电线的电感		$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\ln \frac{D}{R} + \frac{1}{4} \right) \text{ (H)}$	l —输电线长度 $R \ll D$ $D \ll l$
三线制输电线的电感		三线间距离不等时，一相等效电感： $L_{\pm} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{D'}{R} + \frac{1}{4} \right) \text{ (H)}$ 三线间距离相等时，一相等效电感： $L_{\pm} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{D}{R} + \frac{1}{4} \right) \text{ (H)}$	l —输电线长度 $D' = \sqrt[3]{D_{AB} D_{BC} D_{CA}}$ $D \ll l$ $D = D_{AB} = D_{BC} = D_{CA}$ $D \ll l$

(续)

电 感	结构图形	电 感 L	说 明
圆环的电感		$L = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} - 2 + \frac{\mu_r}{4} \right)$ (H)	a —圆环截面的半径 $a \ll R$
长螺管线圈的自感		$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$ (H)	A —螺管线圈截面积 N —匝数 $l/R > 40$
短螺管线圈的自感		$L = \frac{6.4 \mu_0 N^2 D^2}{3.5 D + 8 l} + \frac{D - 2.75 d}{D}$ (H)	N —匝数

注：1.表中数据，图形取自《电气工程师手册》（机械工业出版社出版，1987年版）并作了部分修正。
2.磁导率为 μ 时，导体及导体外面为非铁磁性物质，否则为 μ_r 。
3.长度单位为m。

4 电磁场中的能量、力及某些效应

4.1 恒定电磁场中的能量

1. 电场的能量 静电场中静电能是分布在电场中的，单位体积内的电能称为电能密度，电能密度

$$w_e = \frac{1}{2} ED \quad (\text{J/m}^3)$$

式中 E 为电场强度， D 为电位移。

体积 V 内贮存的电能量

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} ED dV \quad (\text{J})$$

2. 磁场中的能量 恒定磁场中的磁能密度表示为

$$w_m = \frac{1}{2} BH \quad (\text{J/m}^3)$$

体积 V 内的磁能

$$W_m = \int_V \frac{1}{2} BH dV \quad (\text{J})$$

4.2 恒定电磁场中的力

1. 静电场中电荷受到的力 在匀强电场中，

单位正电荷受到的力为电场强度 E ，则电荷 q 所受到的力

$$f_e = qE$$

2. 磁场对运动电荷的作用力 磁场 B 中，以速度 v 运动的电荷受到的力

$$f_m = qv \times B$$

3. 洛伦兹力 空间某点处电场强度，磁感应强度分别为 E 、 B ，则以速度为 v 的运动电荷在该点处受到的合力

$$f = f_e + f_m = qE + qv \times B$$

称此合力 f 为洛伦兹力。

4.3 交变磁场中的磁滞及涡流

1. 磁滞 铁磁物质在磁化过程中，由于铁磁物质内部磁畴作用，其磁场强度与磁感应强度之间的关系，见图2-1-5所示，这种 B 的变化落后于 H 的变化称为磁滞现象，图中之曲线称为磁滞回线。图2-1-5中， ab 段称为初始磁化曲线，当 H 减小为零时 B 仍不为零，如图中 ac 、 af 称为剩磁；当 B 为零时， H 不为零，如图中 ad 、 ag 称为矫顽力。

铁磁物质在反复磁化时，由于磁滞现象引起的损耗称为磁滞损耗。

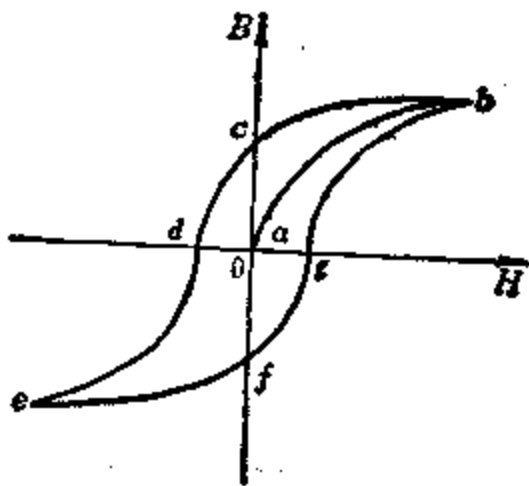


图 2-1-5 磁滞回线

2. 涡流 当通过导体的磁场变化时，导体内垂直于磁力线方向的导体截面中感应出的环形电流，称为涡流。由涡流在导体内部电阻上消耗的能量称为涡流损耗，其功率

$$P_e = K_e f^2 B_m^2 V \quad (W)$$

式中 f 为磁场频率 (Hz)； B_m 为 B 的最大值 (T)； V 为导电物质的体积 (m^3)， K_e 为与导电材料的电阻、导体截面大小和形状有关的系数。

4.4 交变磁场中的介质损耗、集肤效应与邻近效应

1. 介质损耗 在交变电场中，介质的损耗可以分为两部分：其一，是由于电介质微弱的导电性引起的能量损耗，这一部分损耗较小；其二，是电介质内部在反复极化过程中，它的分子间不断互相“摩擦”而引起的损耗，工程中常用介质损耗角 δ 的正切 $\tan \delta$ 来表征介质损耗的大小。绝缘材料的 $\tan \delta$ 值一般在 10^{-4} 到 10^{-1} 之间。

2. 集肤效应 交变电流通过导体时，随着频率的增加，在导体截面上的电流分布越来越向导体表面集中，这种现象叫做集肤效应。集肤效应本质上是衰减电磁波向导体内传播引起的效应。当在集肤效应不太显著的情况下，可简要说明如下：如图2-1-6所示，当导线中有电流 I_0 通过时，在它周围产生环形磁场 B 。当 I_0 变化时， B 也随之变化。变化的磁场在导体内部产生涡流 I_1 。在一个周期中的大部分时间内，轴线附近 I_1 和 I_0 方向相反，表面附近相同，于是导体截面上电流密度的分布将是边缘的密度大于中心的密度。

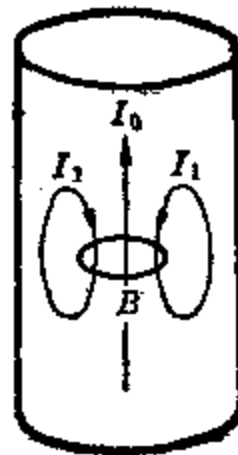


图 2-1-6 集肤效应

3. 邻近效应 有若干通以交变电流的导体，当它们间的距离较近时，则每一导体不仅处于本身的时变电磁场中，同时还处于其它导体的时变电磁场中，在任一导体中电磁场分布将与它单独存在时不同，这种现象称为邻近效应，在工程中只有在导体截面积较大、相距很近或频率很高时，才有必要考虑其影响。

第2章 电路基础

1 电路与电路定律

1.1 电路的基本概念

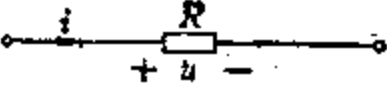
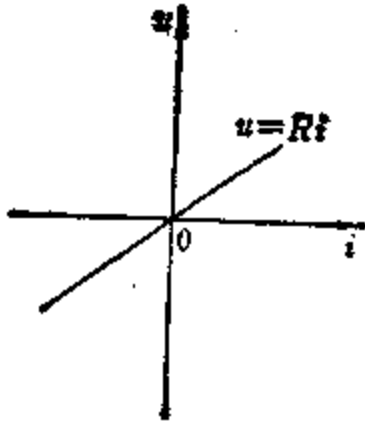
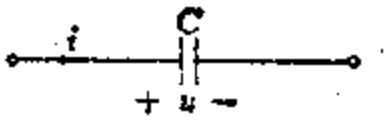
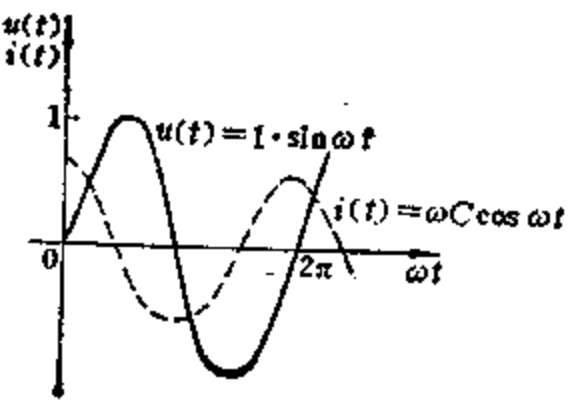
1. 电路及电路模型 实际电路是由电源及各种用电设备组成。实际电路中的器件千差万别，而元件只有少数几种。在电路分析中所指的电路元件是具有某种确定电磁性质的假想元件，电路指的是由假想元件构成的电路模型。

2. 电路元件及其特性 表2-2-1列出了集中参

数的线性电路元件的符号、单位、伏安关系的数学表达式及伏安关系的典型曲线。另外还对其主要性质做了简要说明。

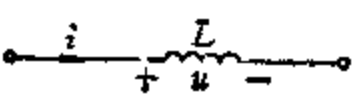
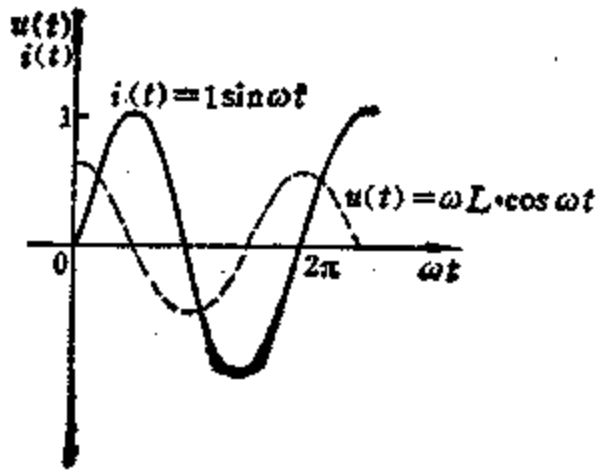
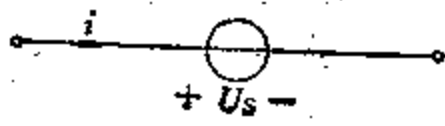
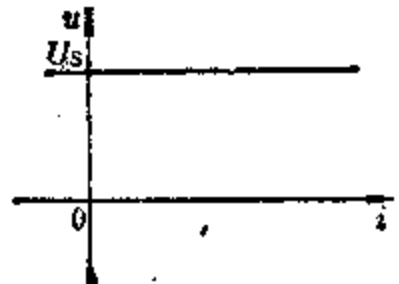
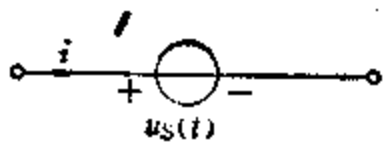
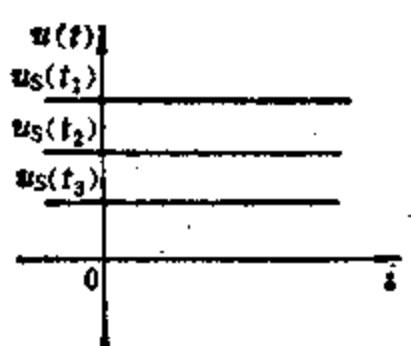
3. 耦合电感及理想变压器 表2-2-2列出了耦合电感及理想变压器的符号、单位、伏安关系表达式并对其特性作了简要说明。耦合电感及理想变压器是由实际电路中的器件取其主要特性而得到的理想器件，与电路中的元件一起构成电路模型。有时也把耦合电感，理想变压器称为元件。

表2-2-1 电路元件及其特性

元件	符 号	单 位	伏安关系表达式	伏安关系曲线	简要说明
电阻 R		欧(姆) Ω	$R = \frac{u}{i}$		R 为常数，称为线性电阻，其伏安关系遵守欧姆定律 $u = Ri$
电容 C		法(拉) F	$i = C \frac{du}{dt}$ $u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$		C 为常数，电流 i 与电压的变化率 $\frac{du}{dt}$ 成正比，电压与电流的变化历史有关

二
端
元
件

(续)

元件	符 号	单 位	伏安关系表达式	伏安关系曲线	说 明
电感 L		亨 (利) H	$u = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$		L 为常数, 电压与电流的变化率成正比, 电流与电压的变化历史有关
直流电压源 U_s		伏 (特) V	$U_s = \text{常 量}$ $i_s = \text{任意值}$		U_s 为常数, 电压源电流由外部电路情况而定
交流电压源 $u_s(t)$		伏 (特) V	$u_s(t) = f(t)$ $i(t) = g(t)$		$u_s(t)$ 是时间的函数, 电压源 $u_s(t)$ 的电流由外部电路情况而定

二
端
元
件

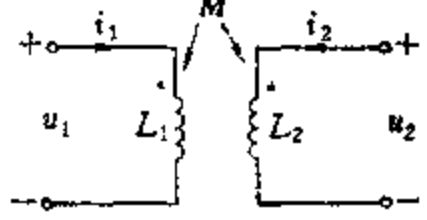
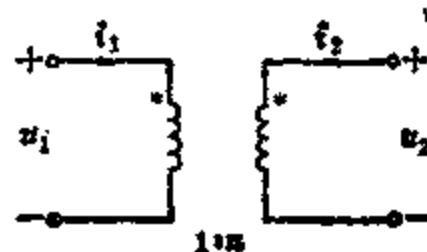
(续)

元件	符 号	单 位	伏安关系表达式	伏安关系曲线	简要说明
二 端 元 件 直流电 流源 I_S		安 (培) A	$I_S = \text{常数}$ $\neq \text{任意值}$		I_S 是常数, 电流源电压由外电路情况而定
交流电 流源 $i_S(t)$		安 (培) A	$i_S(t) = f(t)$ $u(t) = g(t)$		$i_S(t)$ 是时间的函数, 电压由外部电路情况而定
四 端 元 件 电压控 电压源 (VCVS)		伏 (特) V	$u_2 = \mu u_1$ $i_2 = \text{任意值}$ $i_1 = 0$		μ 为常数, 无量纲, 表示电压放大倍数, i_2 由外电路决定

(续)

元件	符 号	单 位	伏安关系表达式	伏安关系曲线	简要说明
四 端 元 件 电流控 电压源 (CCVS)		伏 (特) V	$u_2 = r i_1$ $i_2 = \text{任意值}$ $u_1 = 0$		r 为常数，用来表示控制参数， i_2 由外电路决定
电压控 电流源 (VCCS)		安 (培) A	$i_2 = g u_1$ $u_2 = \text{任意值}$ $i_1 = 0$		g 为常数，单位为西 (门子) S，表示控制参数， u_2 由外电路决定
电流控 电流源 (CCCS)		安 (培) A	$i_2 = \beta i_1$ $u_2 = \text{任意值}$ $u_1 = 0$		β 是常数，无量纲，表示电流放大倍数，用以表示控制参数， u_2 由外电路决定

表2-2-2 耦合电感及理想变压器

符 号	单 位	伏安关系表达式	简要说明
耦合电 感 (互感) M 	亨(利) H	$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$	M 为常数,表示互感。 “*”号表示同名端,当 电流从同名端流入,在另 一线圈上产生的互感电压 由同名端指向异名端
理想变 压器 n 	无量纲	$u_2 = nu_1$ $i_2 = -\frac{1}{n}i_1$	n 为常数,无量纲,是 二次线圈 N_2 与一次线圈 N_1 的匝比, $n = N_2/N_1$ 。 理想变压器不消耗能量也 不产生能量,只起变换电 压、电流作用。“*”号表 示同名端

互感耦合的伏安关系表达式中自感电压与互感电压的正、负号按下述方法确定。

1) 自感电压 如果线圈端口处的电压、电流采用关联参考方向(如图2-2-1 a所示),自感电压前为正号,反之为负号。

2) 互感电压 如果电流从线圈的同名端流入,则在另一线圈上产生从同名端指向异名端的互感电压。当互感电压与端口处的电压参考方向相同时,互感电压前加正号,否则加负号。如图2-2-1所示。

图2-2-1 a、b及c的伏安关系表达式如下:

图2-2-1 a 时
$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

图2-2-1 b 时
$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

图2-2-1 c 时

$$u_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$$

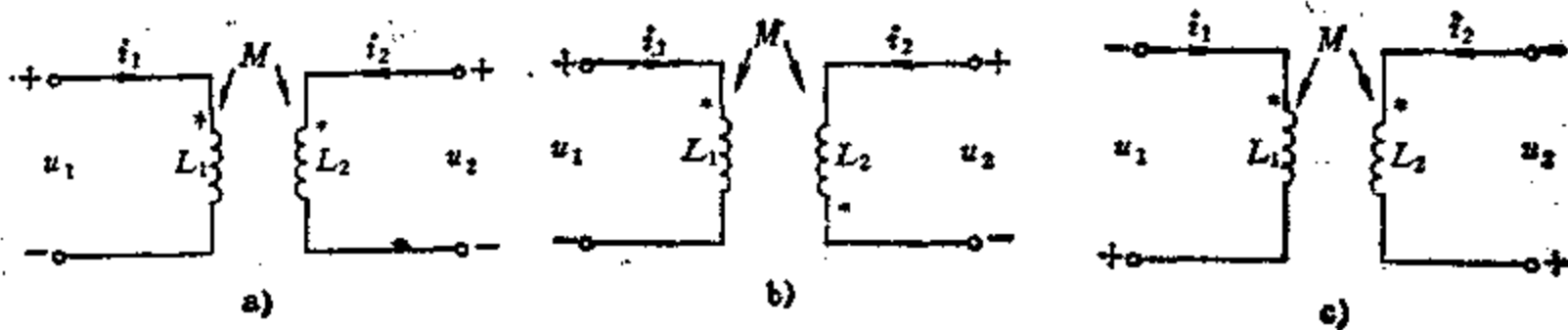


图2-2-1 耦合电感

- a) 互感电压与端电压极性相同 b) 互感电压与端电压极性相反
c) 互感电压与端电压极性相反,且端口处电压与电流参考方向不同

同名端标记“*”是根据在线圈中以正值且为增长的电流流入端与另一线圈中互感电压的高电位端各标一个“*”号构成。如图2·2-2 a所示的互感耦合一次线圈中，当电流 i_1 从1端流入且为正的时，一次线圈中的自感磁通进入二次线圈，在2端产生高电位，2'端产生低电位，则在1及2两端标注上“*”为同名端，如图2·2-2 b所示。可以看出，同名端的位置只与线圈的绕向及相对位置有关，而与电压、电流的参考方向的选择无关。

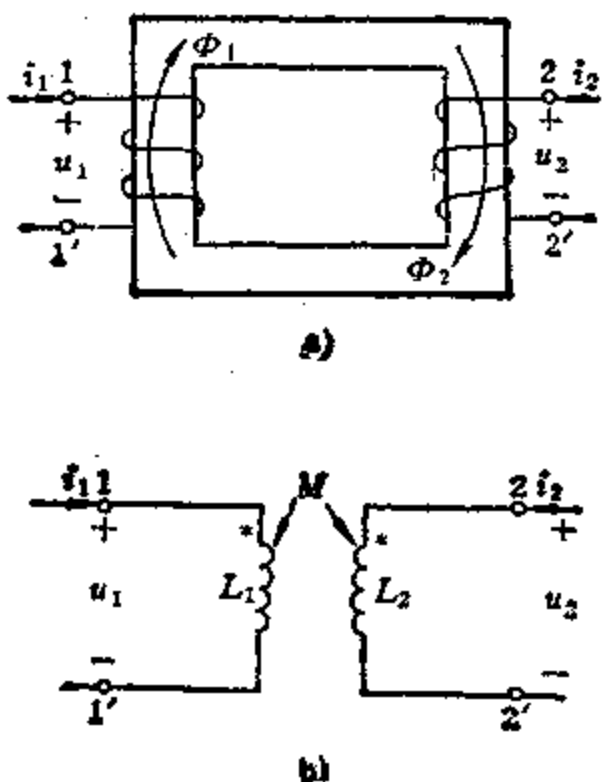


图 2·2-2 互感耦合同名端标注
a) 实际互感耦合线圈 b) 互感耦合的同名端标注

理想变压器的同名端标注与互感耦合的同名端标注方法相同。但理想变压器是非记忆性元件。只起变换电压、电流的作用，不消耗能量，也不产生能量。

1·2 欧姆定律

在线性电路中，通过一段无源支路的电流与支路两端的电压成正比，称之为欧姆定律。可以用下式表示

$$i = \frac{\dot{U}}{Z}$$

式中 i 为电流相量； \dot{U} 为电压相量； Z 为阻抗。各量的参考方向见图2·2-3所示。

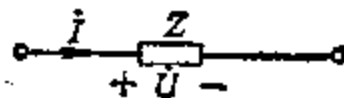


图 2·2-3 欧姆定律

在直流电路中欧姆定律可以表示为：

$$I = \frac{U}{R}$$

式中 I 为直流电流； U 为直流电压； R 为电阻。

1·3 基尔霍夫第一、第二定律 (见表2·2-3)

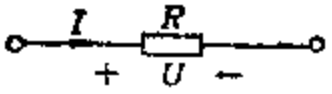
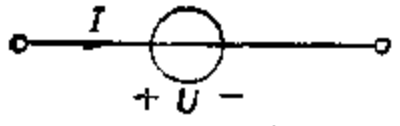
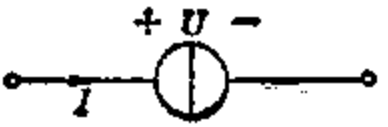
1·4 电能与电功率

在直流电路中，电能与电功率的计算公式见表2·2-4所示。对于交流电路，其功率见本章5·5节正弦稳态电路的功率。

表2·2-3 基尔霍夫第一、第二定律

	基尔霍夫第一定律 (基尔霍夫电流定律, KCL, Kirchhoff's Current law)	基尔霍夫第二定律 (基尔霍夫电压定律, KVL, Kirchhoff's Voltage law)
内容	对于任何节点，在任一时刻流入（或流出）该节点的电流代数和为零 $\sum i_k(t) = 0$ 其相量形式为 $\sum I_k = 0$	在任一回路，按一个绕行方向绕行一周，在任一时刻其各段的电压降（或电压升）的代数和为零 $\sum u_k(t) = 0$ 其相量形式为 $\sum \dot{U}_k = 0$
举例	<p>对节点A，电流关系的表达式为， $\sum I = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$ </p>	<p>对于回路中，电压关系式为， $\sum \dot{U} = \dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CD} + \dot{U}_{DA} = 0$ </p>

表2-2-4 直流电路中的电能与电功率

	电 能 W	电 功 率 P
	$W = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t = UI t \quad (\text{J})$ <p>W 永远为正值, 消耗电能</p>	$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} = UI \quad (\text{W})$ <p>P 永远为正值, 消耗功率</p>
	$W = UI t \quad (\text{J})$ <p>$W > 0$ 吸收能量 $W < 0$ 放出能量</p>	$P = UI \quad (\text{W})$ <p>$P > 0$ 吸收功率 $P < 0$ 放出功率</p>
		

2 电路基本分析方法

当已知电路的结构和元件参数, 而要求出电路中的电压、电流, 或要确定电路中的激励与响应的关系等, 这就是所谓的电路分析。对线性电路的分析大体可以从两种不同的途径着手, 其一是以基尔霍夫定律和元件的伏安关系为依据, 列出必要的方程, 然后联立求解方程, 如支路电流法、网孔分析法、节点分析法等; 另一是以线性电路的主要原理和定理为依据, 简化电路的分析和计算, 如迭加定理, 互易定理等。

2.1 支路电流法

支路电流法是以支路电流为未知量, 应用基尔霍夫定律及元件的伏安关系列出基尔霍夫电流定律

方程和基尔霍夫电压定律方程。所列方程数目应与支路电流数目相等, 然后, 对这些方程求解, 得到各支路电流。

设电路中支路数为 b , 节点数为 n , 则支路电流法的解题步骤如下:

(1) 设定各支路电流参考方向, 并标在电路图中。

(2) 任取电路中的 $n - 1$ 个节点为独立节点, 列出 $n - 1$ 个KCL方程。

(3) 选取 $b - n + 1$ 个独立回路, 设定它们的绕行方向并标注在图中, 用支路电流为未知量列出 $b - n + 1$ 个回路的KVL方程。

(4) 联立求解上述 b 个独立方程, 求得各支路电流。

例 如图2-2-4所示电路，选A、B、C点为独立节点。各支路的参考方向及各回路的绕行方向已标注在图2-2-4中。用支路电流法所列方程如下

节点A: $-I_4 + I_5 - I_{S1} = 0$

节点B: $-I_5 - I_{S2} - I_6 = 0$

节点C: $I_{S1} - I_3 + I_6 = 0$

回路I: $U_1 + R_3 I_6 - R_1 I_5 = 0$

回路II: $R_1 I_5 + U_2 - U_3 = 0$

回路III: $-R_2 I_6 - R_3 I_6 - U_4 = 0$

式中 U_1 ——设定为 I_{S1} 上的电压; U_2 ——设定为 I_{S2} 上的电压。图2-2-4电路中 I_{S1} 、 I_{S2} 两支路的支路电流即为 I_{S1} 和 I_{S2} ，因此电路中未知的支路电流为 I_4 、 I_5 、 I_6 及 I_3 ，电流源上的电压 U_1 与 U_2 是未知的，共有6个未知量，所列6个方程是独立的方程，因此可以解出全部支路电流，同时电流源上的电压也可以求得。

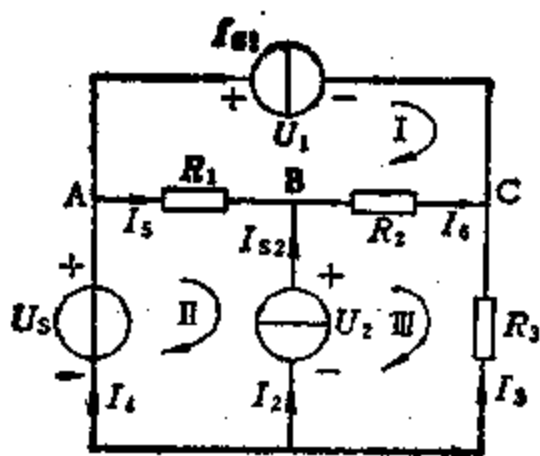


图 2-2-4 支路电流法例图

2-2 支路电压法

支路电压法是以支路电压为变量，列出独立回路的电压方程及以支路电压为变量列出的独立节点的电流方程，然后解方程求出各支路电压。

例 如图2-2-5所示电路用支路电压法所列方程如下:

回路I: $U_1 + U_3 - U_5 = 0$

回路II: $U_5 - U_2 - U_1 = 0$

回路III: $U_2 + U_4 - U_3 = 0$

节点A: $-I + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_3} = 0$

节点B: $-I_5 - \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = 0$

节点C: $-\frac{U_2}{R_2} - \frac{U_3}{R_3} + \frac{U_4}{R_4} = 0$

式中 I 为设定电压源上的电流是未知量; U_5 为设定电流源上的电压是未知量。由图 2-2-5 所示电路

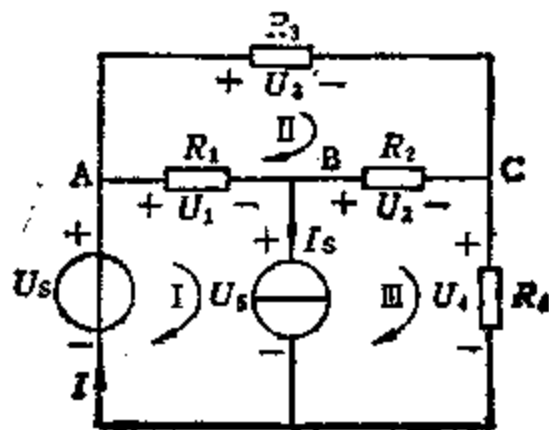


图 2-2-5 支路电压法例图

共列出6个方程。未知量为支路电压 U_1 、 U_2 、 U_3 、 U_4 、 U_5 及电压源支路的电流 I 共6个未知量，解联立方程组可以求出它们。

2-3 网孔分析法

在一平面电路中有 b 条支路及 n 个节点，则有 $b - n + 1$ 个内网孔（简称网孔）。网孔分析法中的网孔电流是假想沿着网孔边界流动的电流，网孔电流的数目等于网孔数。用网孔分析法建立网孔方程及其求解步骤如下:

(1) 设定网孔电流的绕行方向，并标注在电路图中。

(2) 以网孔电流的绕行方向作为列KVL方程的绕行方向，分别列出各网孔的以网孔电流为变量的KVL方程。网孔方程的一般形式为:

$$R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \dots + R_{1n}I_n = U_{S11}$$

$$R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + \dots + R_{2n}I_n = U_{S22}$$

⋮

$$R_{m1}I_1 + R_{m2}I_2 + \dots + R_{mn}I_n = U_{Smn}$$

式中 I_1 、 I_2 、 \dots 、 I_n 为网孔1、2、 \dots 、 n 的网孔电流; R_{11} 、 R_{22} 、 \dots 、 R_{nn} 为网孔1、2、 \dots 、 n 各网孔的自电阻; R_{12} 、 R_{21} 、 \dots 、 R_{ij} 、 \dots (其中 $1 < i < n$, $1 < j < n$, $i \neq j$) 为不同网孔之间的互电阻; U_{S11} 、 U_{S22} 、 \dots 、 U_{Smn} 为各网孔中沿网孔电流绕行方向电源电压升的代数和 (其中“电源电压升”是指电压源、受控电压源及设定的电流源上的电压的电压升、受控电流源上电压的电压升)。如果电路中有电流源、受控电流源时，应增加电流源、受控电流源对网孔电流约束的方程。同时，电路中有受控源时，还应增加以网孔电流表示受控源控制量的方程。

例 如图2-2-6所示电路，其网孔方程为:

网孔I: $(R_1 + R_2 + R_3)I_1 - R_2I_2 - R_3I_3 = 0$

网孔II: $-R_2I_1 + R_2I_2 = -U_S + U_1$

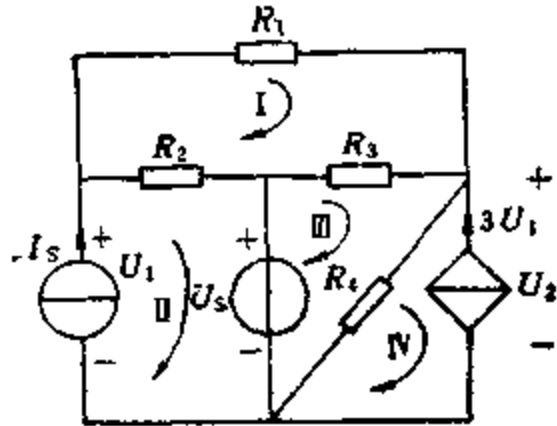


图 2-2-6 网孔分析法例图

网孔 II: $-R_2 I_1 + (R_2 + R_4) I_2 - R_4 I_4 = U_S$

网孔 IV: $-R_4 I_2 + R_4 I_4 = -U_2$

增加的电流源、受控电流源对网孔电流的约束方程分别为:

$$I_S = I_2$$

$$3U_1 = -I_4$$

增加的网孔电流表示受控源控制量的方程为:

$$U_1 = R_2 I_2 - I_1 + U_S$$

另外,在网孔分析法中,设定网孔电流的绕行方向全是顺时针(或全是逆时针)时自电阻全是正值,互电阻全是负值。

(3) 解方程组,求得各网孔电流。

(4) 设定各支路的电流参考方向,则各支路电流可由有关网孔电流的和或差得到。

2.4 节点分析法

在电路的 n 个节点中,任选一个节点作为参考节点,将其余 $n - 1$ 个节点到参考节点的电压(即节点电压)作为未知量,用基尔霍夫电流定律列出 $n - 1$ 个以节点电压为未知量的电流平衡方程,解方程求出各节点电压。节点分析法的求解步骤如下:

(1) 选定电路参考节点,并标以接地图形符号,其余 $n - 1$ 个节点编上序号标在图中,这 $n - 1$ 个节点称为独立节点。

(2) 根据基尔霍夫电流定律和伏安关系 ($I = f(U)$) 列出所有独立节点的节点方程。对于电路中某一节点 k 所列以节点电压为未知量的电流平衡方程,即为该节点的节点方程。其节点 k 的节点方程的一般形式为

$$G_{k1} U_1 + G_{k2} U_2 + \dots + G_{kk} U_k + \dots$$

$$G_{k(n-1)} U_{(n-1)} = I_{skk}$$

式中 $U_1, U_2, \dots, U_k, \dots, U_{n-1}$ 为 $n - 1$ 个独立节点电压; G_{kk} 为节点 k 的自电导; G_{kj} ($j = 1, 2, \dots, n - 1, j \neq k$) 为节点 k 分别与其他独立节点的互电导,所有互电导前都冠以负号; I_{skk} 为流入节点 k 的电源电流的代数和,其中,电源电流是指电流源电流、受控电流源电流及电压源、受控电压源上的未知电流。当电压源或受控电压源两端分别与两个节点相接时还应增加电压源、受控电压源对节点电压的约束方程。电路中有受控源时还应增加以节点电压表示受控源控制量的方程。

例 如图 2-2-7 所示电路,其节点方程如下:

节点 1: $(2 + 2)U_1 - 2U_2 = 5 \times 2 + 5 + 3U$

节点 2: $-2U_1 + (2 + 5 + 2)U_2 = 2I + I'$

节点 3: $2U_2 = 3 - I' - 5$

增加电压源对节点电压的约束方程

$$U_2 - U_3 = 10$$

增加用节点电压表示受控源控制量的方程为:

$$U = U_1 - 5$$

$$I = 2(U_1 - U_2)$$

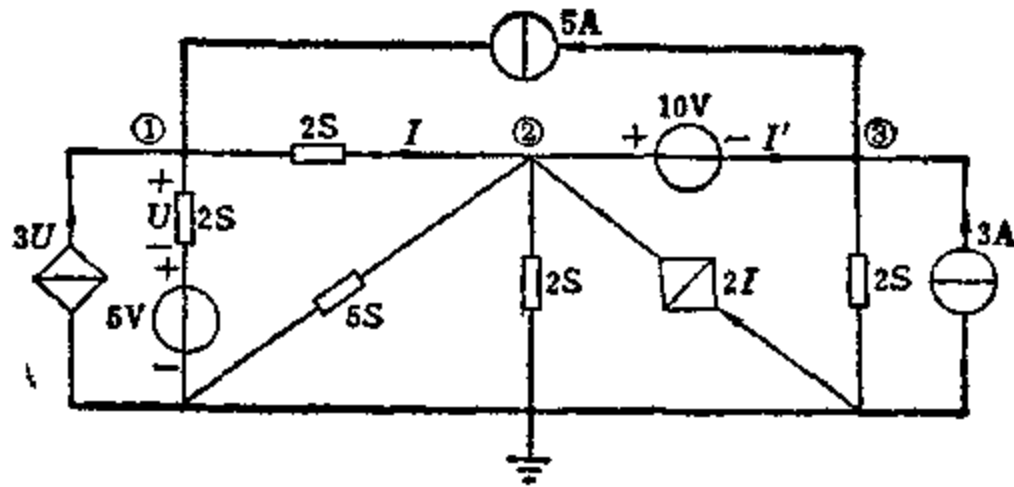


图 2-2-7 节点分析法例图

2.5 割集分析法

2.5.1 树的概念

1. 图 在电路分析中用一线段表示电路中的每一个元件,这条线段称为支路。线段的端点称为节点,这样得到的几何结构图形称为“图”或“图形”。更严格地说,图是一组线段和一组节点的集合。如图 2-2-8 所示。

2. 定向图 如果图中每一支路规定一个方向,则所得的图称为定向图,如图 2-2-8c 所示定向图中支路的方向取与原电路中支路的电压、电流参考方向相同的方向。

3. 连通图 如图中任意两节点之间最少存在

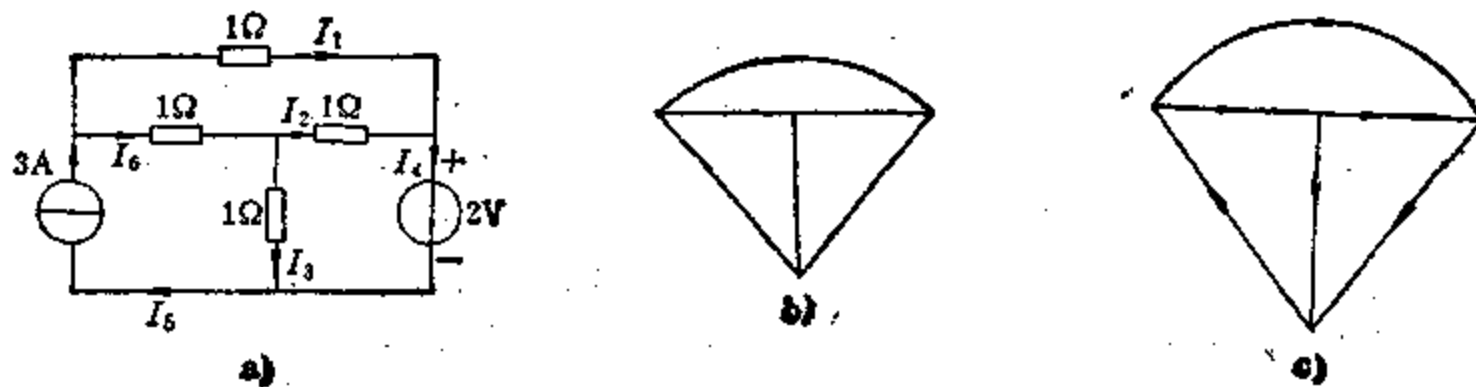


图 2-2-8 图、定向图

a) 原电路 b) 原电路对应的图 c) 定向图

一条支路构成的路径，则该图称为连通图。否则称为非连通图。连通图和非连通图如图2-2-9所示。

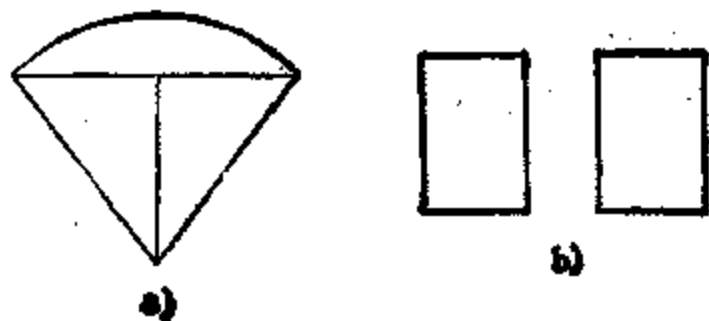


图 2-2-9 连通图和非连通图

a) 连通图 b) 非连通图

4. 树 是连通图中移去某些支路，而剩下的图形中不存在任何回路，但所有节点仍然互相连通，这样的图形叫“树”。构成树的各支路称为“树支”。其余的支路称为连支。对于一个图形来说，树有多种，但树支数目是一定的。设图形有 n 个节点，则

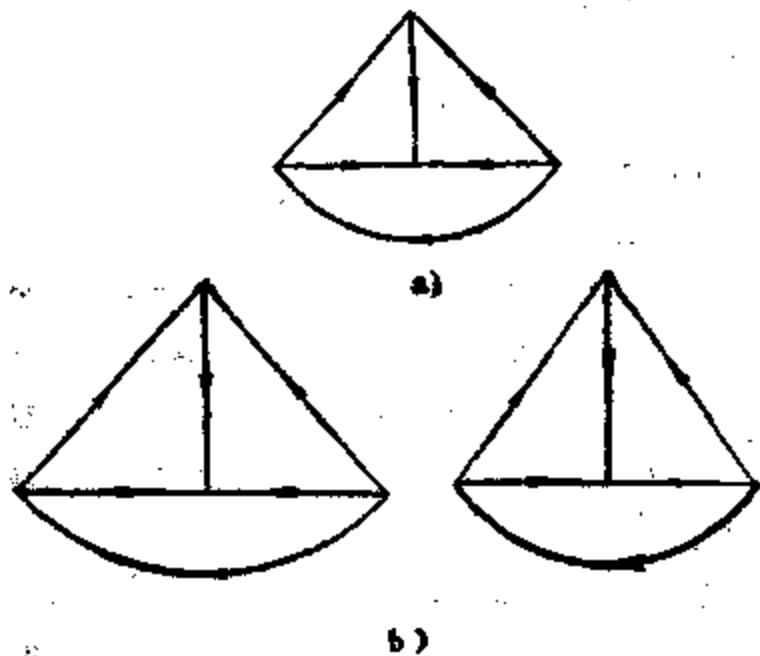


图 2-2-10 树

a) 图 b) 两种不同的树

树支数必为 $n - 1$ 。树支数与连支数总和等于总支路数 b ，即连支数必定为 $b - (n - 1)$ 。图及其两种树见图2-2-10所示。其中粗线表示树，细线表示连支。

2-5-2 割集分析法

1. 割集 对连通图的某些支路进行切割，使连通图分成两个部分，只要少切割一条支路，图形仍是连通的，这些被切割的支路的集合称为割集。

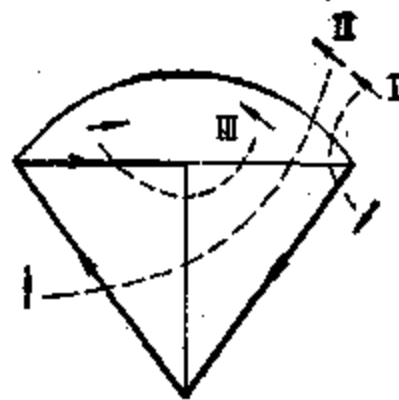


图 2-2-11 割集

如图2-2-11所示，给出了不同的几种割集。

2. 基本割集 在取割集时，使得每个割集中包含有一条且只包含一条树支，这样的割集称为基本割集。对于一个图，基本割集的数目等于树支数目。图2-2-12绘出了基本割集。

3. 基本割集的参考方向是与割集中树支的参考方向一致，用箭头表示于割集（虚线）的两端，如图2-2-11所示。

4. 割集分析法。是以树支电压为未知量，列出基本割集方程，即以树支电压为变量的电流平衡方程。割集分析法解题步骤如下：

1) 对原电路中各支路选定关联参考方向（电压参考方向与电流参考方向取一致方向）。

2) 由原电路的定向图确定一种树及其相应的基本割集。

3) 由基本割集建立基本割集方程, 然后解方程, 求出各树支电压, 进而得出连支电压。

对于电路中第 k 个基本割集的割集方程的一般形式可以表示为:

$$G_{k1}U_1 + G_{k2}U_2 + \dots + G_{kj}U_j + \dots + G_{k(n-1)}U_{(n-1)} = I_{Skk}$$

式中 G_{kj} 为第 k 个基本割集中所有电导之和, 总为正号; U_k 为第 k 个基本割集中树支电压; G_{kj} ($j = 1 \dots (n-1), j \neq k$) 表示第 k 个基本割集与其他基本割集的公共电导之和, 当两割集在公共电导上的方向相同时, 电导之前加正号, 否则加负号; I_{Skk} 为基本割集 k 中电源电流的代数和, 当电流方向与割集方向相反时电流前加正号, 否则加负号。其中“电源电流”是指电流源电流, 受控电流源电流、电压源和受控电压源上的未知电流。当电压源、受控电压源为连支时, 应增加电压源、受控电压源对树支电压约束的方程。电路中有受控源时应增加以树支电压表示受控源控制量的方程。

例 图 2-2-12 a 所示电路, 其基本割集已设定如图 2-2-12 b 所示。因为割集 I 的树支电压即电压源电压 (即 $U_4 = U_S$), 所以割集 I 的割集方程不必

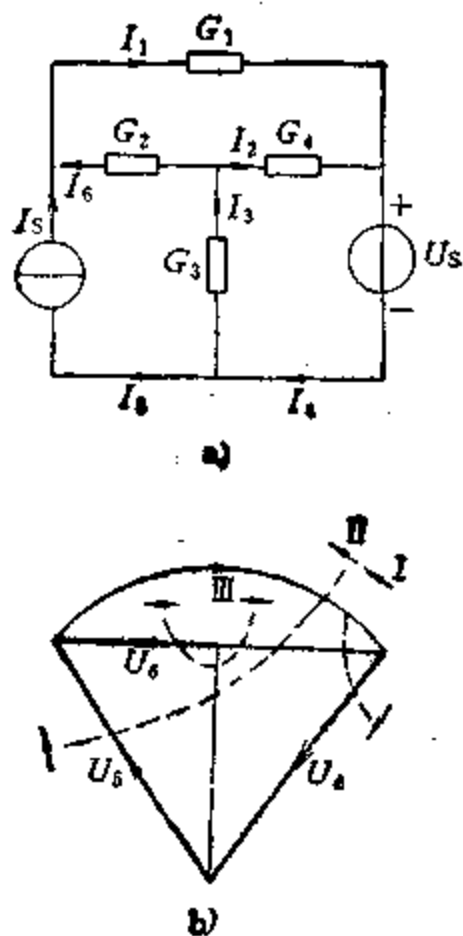


图 2-2-12 割集分析法例图
a) 原电路 b) 基本割集

列出。割集 I、II 的方程分别如下:

$$\text{割集 I: } (G_1 + G_2 + G_4)U_3 + (G_1 + G_4)U_4 - (G_2 + G_4)U_6 = -I_S$$

$$\text{割集 II: } (G_2 + G_3 + G_4)U_6 - (G_3 + G_4)U_5 - G_4U_4 = 0$$

将以上方程联立, 即可解出 U_5, U_6 , 进而可以求出所有支路的电压。

可以看出, 割集分析法与节点分析法本质上是相同的。如果对某些电路适当选取树, 则节点分析法只是割集分析法中的特例。

2.6 回路分析法

1. 基本回路、基本回路电流 对于某个图在选定一种树后, 每次连上一条连支就可以形成一个回路。这个回路是由这条连支和有关树支构成, 称为基本回路。设想连支电流在基本回路中流动, 形成回路电流, 称为基本回路电流。基本回路电流的数目等于连支数目, 即为 $b - (n - 1)$ 。

2. 基本回路电压方程 是以基本回路电流为变量, 沿基本回路电流的绕行方向列 KVL 方程。某一电路第 k 个基本回路的回路方程的一般形式为:

$$R_{k1}I_1 + R_{k2}I_2 + \dots + R_{kk}I_k + \dots + R_{km}I_m = U_{Skk}$$

式中 R_{kk} 为第 k 个基本回路中的自电阻, 总是正值; I_k 为第 k 个基本回路的基本回路电流; R_{kj} ($j = 1 \dots m, j \neq k$) 为第 k 个基本回路与其它基本回路的互电阻, 当两回路电流在互电阻上的方向一致时, 互电阻前加正号, 否则加负号; U_{Skk} 为第 k 个基本回路中电源电压升的代数和。

3. 回路分析法 回路分析法是以基本回路电流为变量, 列出基本回路方程, 解出各基本回路电流, 即各连支电流, 进而解出各树支电流。

例 图 2-2-13 a 所示电路, 其树及基本回路

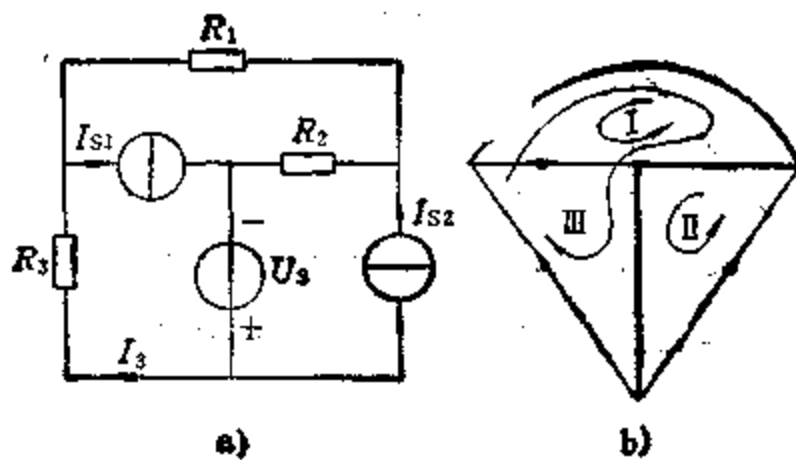


图 2-2-13 回路分析法例图
a) 原电路 b) 基本回路

电流如图 2·2-13 b 所示。

由于回路 I、II 中的回路电流即为电流源 I_{S1} 、 I_{S2} ，因此回路方程 I 和回路方程 II 都不必列出，只要列出回路 III 的如下方程：

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_3 - (R_1 + R_2)I_{S1} + R_2I_{S2} = U_S$$

回路分析法不仅适用于平面电路，也可以用于非平面电路。可以看出，如果对某些电路适当地选取树时，则网孔法可作为回路分析法的特例。

3 网络定理

3.1 叠加定理

线性电路中，若干个独立源同时作用时，在任一支路中的电压或电流响应等于各独立源分别单独作用时在该支路中的电压或电流的代数和，可表示为：

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i U_{Si} + \sum_{j=1}^m \beta_j I_{Sj}$$

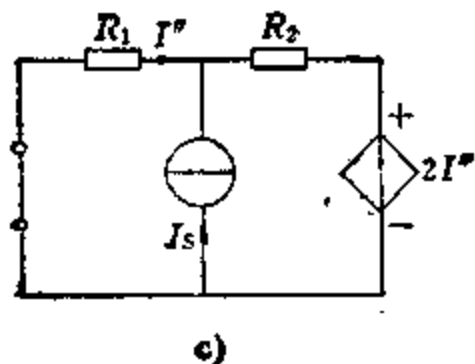
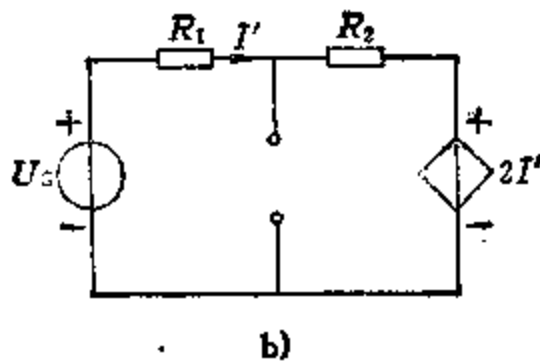
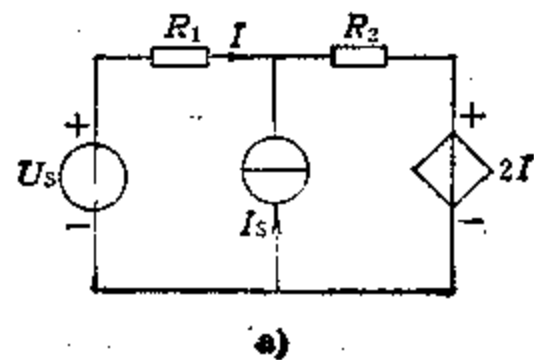


图 2·2-14 叠加定理例图
a) 原电路 b) 电压源单独作用
c) 电流源单独用

式中 Y 为任一支路的电压或电流响应， U_{Si} 为某个独立电压源， I_{Sj} 为某个独立电流源， a_i 、 β_j 为由电路结构和元件参数决定的常数。

但应注意，叠加定理适用于线性电路中的电压响应和电流响应，功率一般不能用叠加定理求解。

当某个电源单独作用，而其它电源为零值，是指电压源用短路线代替，电流源用开路线代替，受控源保持不变的情况。

例 如图 2·2-14 a 所示电路，根据叠加定理，图中电流 I 可以由电压源单独作用时的电流 I' （见图 2·2-14 b）与电流源单独作用时的电流 I'' （见图 2·2-14 c）叠加构成。电源单独作用是指独立源，受控源不能单独作用，它和电阻一样，始终作用于电路。

所以电流

$$I = I' + I''$$

3.2 置换定理

在一个含有若干个独立源的任意线性或非线性的网络中，若已知某一支路的电压和电流分别为 U_k 和 I_k ，且该支路与其它支路无耦合，则该支路可以用下列任一种元件去置换：（1）电压为 U_k 的电压源；（2）电流为 I_k 的电流源；（3）电阻为 $R_k = U_k / I_k$ 的电阻元件。这时，对整个网络各电电压，电流无影响。这就是置换定理，有时称为替代定理。

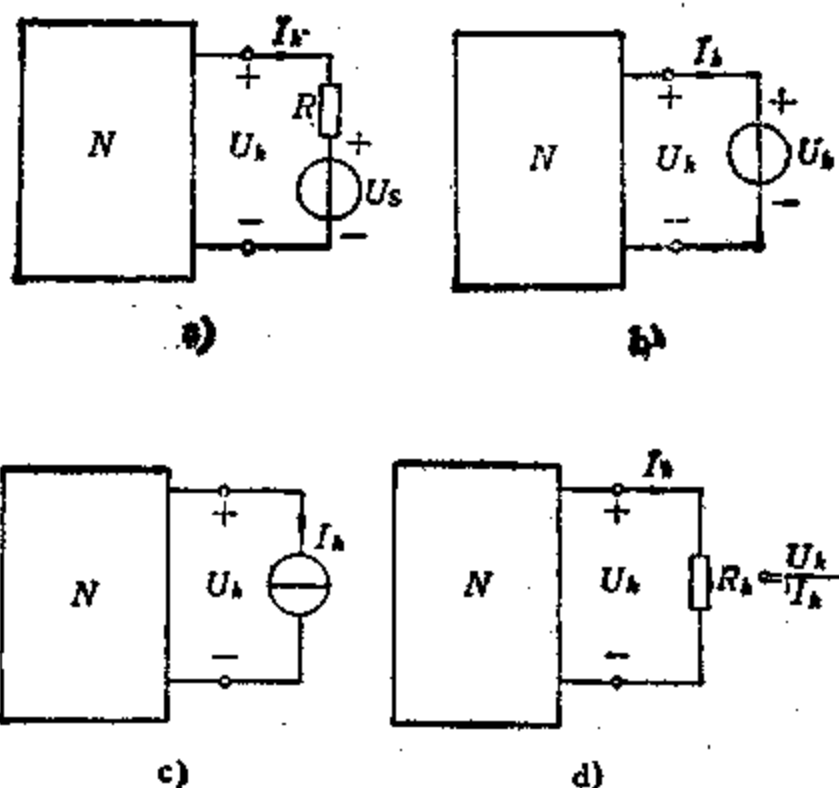


图 2·2-15 置换定理
a) 原电路 b) 用电压源 U_k 置换第 k 条支路
c) 用电流源 I_k 置换第 k 条支路 d) 用电阻 $R_k = U_k / I_k$ 置换第 k 条支路

例 如图 2·2-15 a 所示电路中，第 k 条支路的电压为 U_k ，电流为 I_k ，并且该支路与其它支路无耦合。因此，该支路可以用电压源 U_k 、电流源 I_k 或电阻 $R_k = U_k/I_k$ 去置换，对整个电路中其它支路的电压，电流无影响，其置换情况见图 2·2-15 b、c、d 所示。

3.3 戴维南定理

如图 2·2-16 a 所示的线性含源两端网络 N ，就其两个端钮 a、b 来看，可以用一个电压源与电阻串联支路来代替，如图 2·2-16 b 所示。其电压源电压等于该网络 N 的开路电压 U_{oc} ，其串联电阻 R_0 等于该网络 N 中所有独立源为零值时所得网络 N_0 的等效电阻 R_{ab} ，分别如图 2·2-16 c、d 所示。

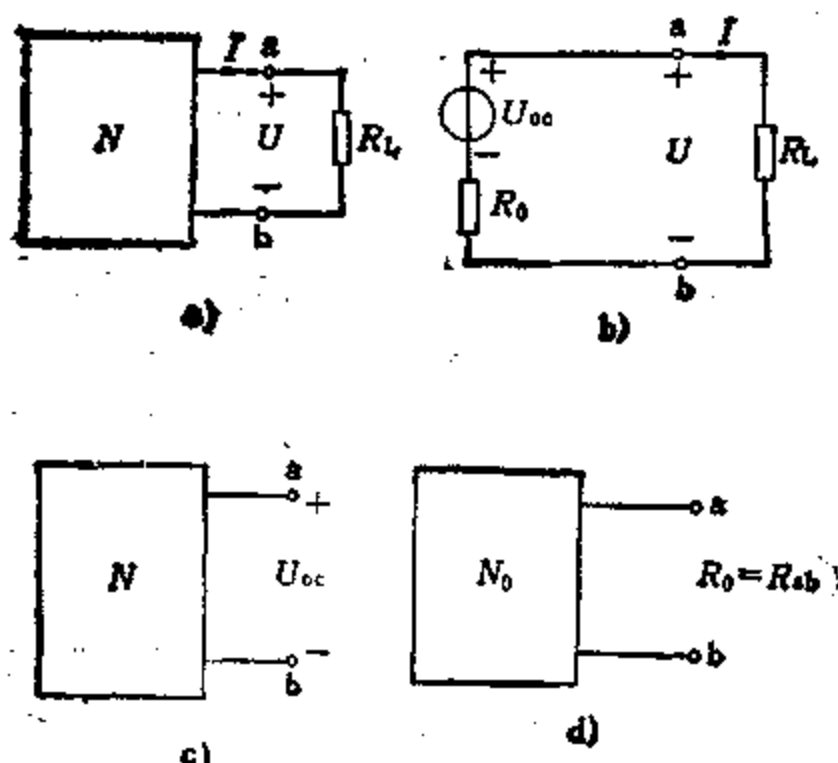


图 2-2-16 戴维南定理
a) 含源两端网络 b) 戴维南等效电路
c) 开路电压 U_{oc} d) 等效电阻 R_0

应该注意：独立源为零值是指原电路中的电压源用短路线代替，电流源用开路线代替，受控源和电阻元件一样保持不变。

例 如图 2·2-17 所示电路，其开路电压 U_{oc} 和独立源为零值时的等效电阻 R_0 ，分别如下：

$$U_{oc} = U_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

3.4 诺顿定理

如图 2·2-18 a 所示的线性含源两端网络 N ，

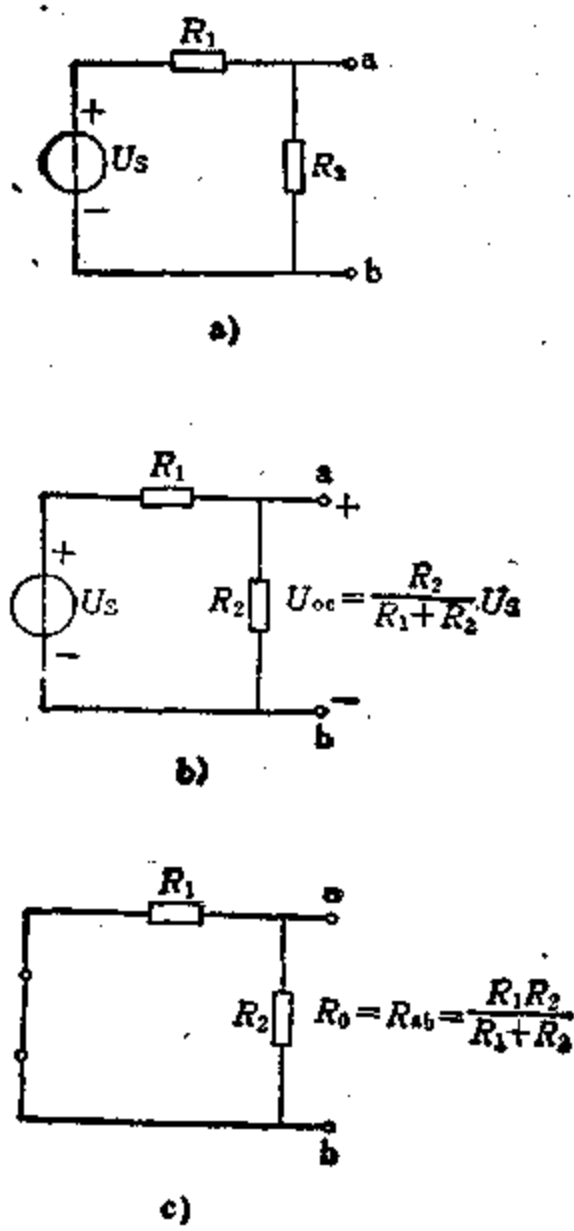


图 2-2-17 戴维南定理例图
a) 原电路 b) 开路电压 U_{oc} c) 等效电阻 R_0

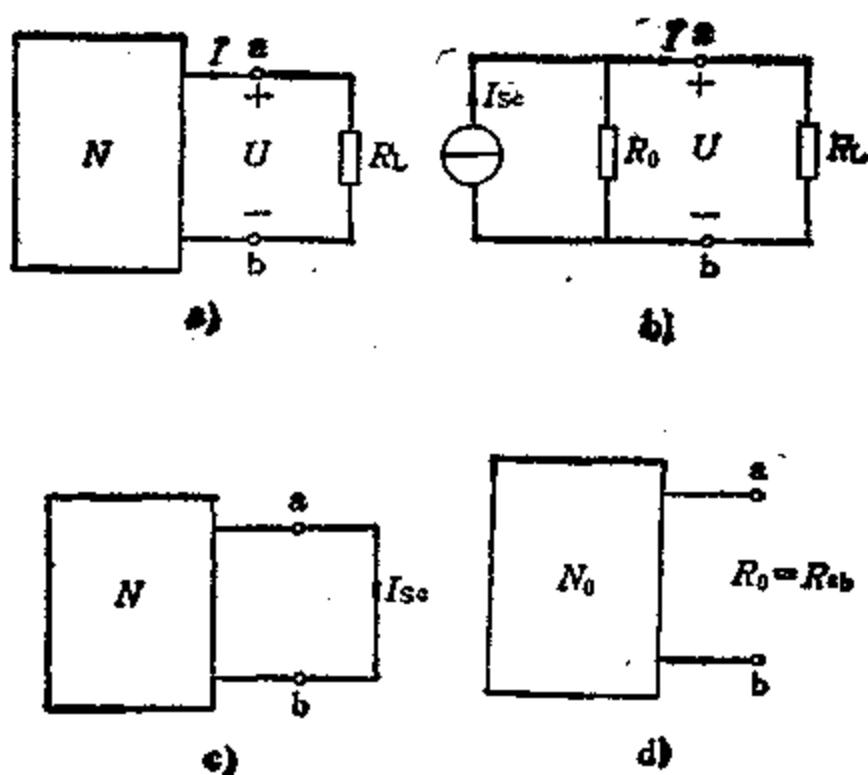


图 2-2-18 诺顿定理
a) 原电路 b) 诺顿等效电路
c) 短路电流 I_{sc} d) 等效电阻 R_{ab}

就其两个端钮 a、b 来看，可以用一个电流源与电阻并联等效电路来代替，如图 2·2-18 b 所示。其电流源的电流等于网络 N 的短路电流 I_{sc} ，如图 2·2-18 c 所示。并联电阻 R_0 等于该网络中所有独立源为零值时所得网络 N_0 的等效电阻 R_{ab} ，如图 2·2-18 d 所示。

例 如图 2·2-19 a 所示电路，其诺顿等效电路如图 2·2-19 b 所示。其短路电流 I_{sc} 和等效电阻 R_0 分别如图 2·2-19 c、d 所示。 I_{sc} 和 R_0 分别表示为：

$$I_{sc} = \frac{U_s}{R_2}$$

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

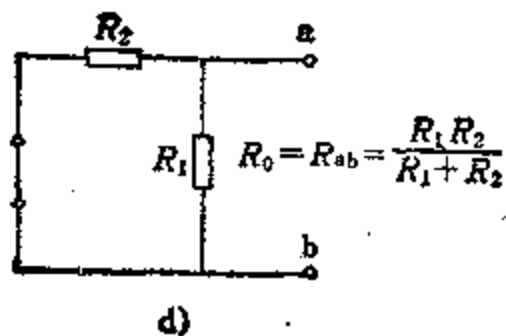
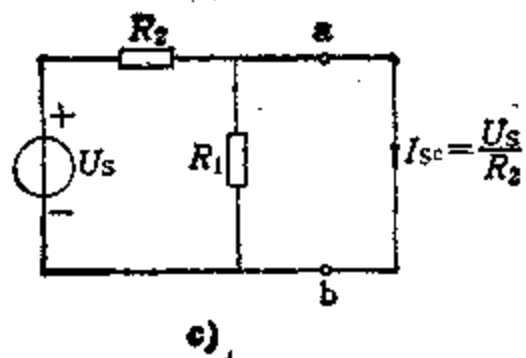
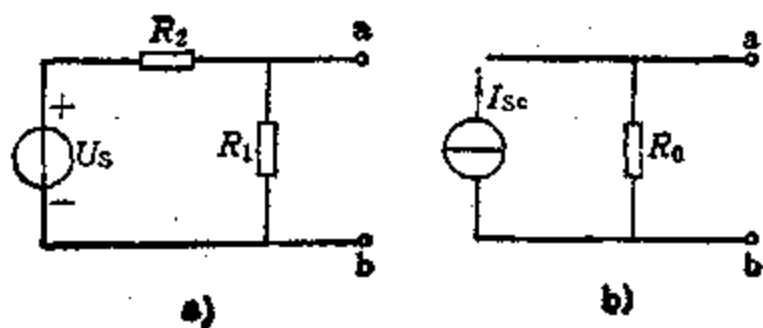


图 2·2-19 诺顿定理例图

a) 原电路 b) 诺顿等效电路
c) 短路电流 I_{sc} d) 等效电阻 R_0

3.5 特勒根定理

特勒根定理对于任何具有线性或非线性，时变元件的电路都适用。

1. 特勒根定理 1 设一网络有 n 个节点、 b 条

支路，对各支路电压、电流取一致的参考方向。令列向量 $[i]$ 和 $[u]$ 分别表示支路电流和支路电压，则在任何时刻

$$[u]^T [i] = 0$$

或

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0$$

例 如图 2·2-20 所示电路，各支路电压、支路电流参考方向一致，则

$$[i] = [i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6]^T$$

$$[u] = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T$$

在任何时刻

$$[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6][i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6]^T = 0$$

或

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 u_k i_k &= u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 \\ &\quad + u_5 i_5 + u_6 i_6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

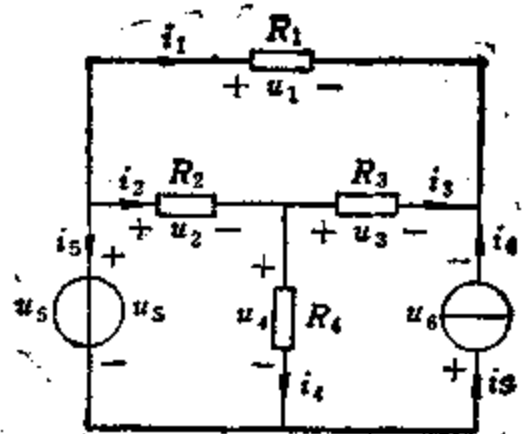


图 2·2-20 特勒根定理例图

2. 特勒根定理 2 设两个图结构相同，但元件不同的网络 N 和 \hat{N} ，两个网络中各支路电压和电流分别用 $[u]$ 、 $[i]$ 和 $[\hat{u}]$ 、 $[\hat{i}]$ 表示，则在任何时刻可以得到：

$$[u]^T [\hat{i}] = 0$$

$$[\hat{u}]^T [i] = 0$$

或

$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = 0$$

例 如图 2·2-21 所示网络 N 和 \hat{N} ，各支路电

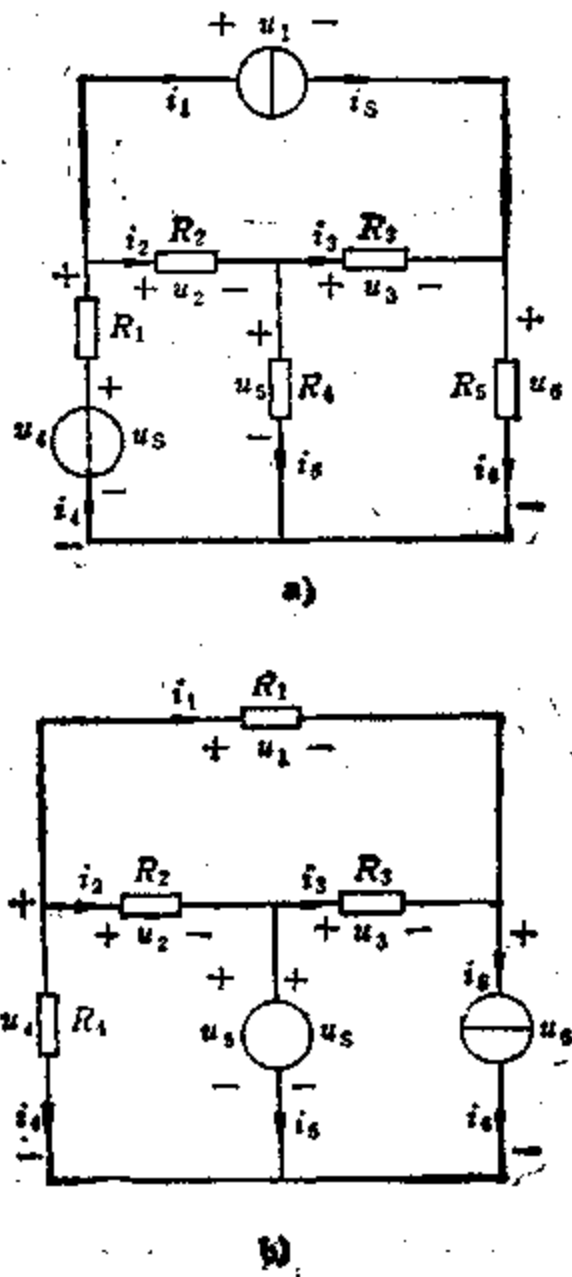


图 2-2-21 特勒根定理 2 例图
a) N 网络 b) N-hat 网络

压和支路电流如图中所示，则：

$$[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6][i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6]^T = 0$$

$$[\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4, \hat{u}_5, \hat{u}_6][i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6]^T = 0$$

或

$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + u_3 \hat{i}_3 + u_4 \hat{i}_4 + u_5 \hat{i}_5 + u_6 \hat{i}_6 = 0$$

$$\sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \hat{u}_3 i_3 + \hat{u}_4 i_4 + \hat{u}_5 i_5 + \hat{u}_6 i_6 = 0$$

3.6 互易网络

不含有独立源和受控源的线性两端口网络，一端口施加激励，另一端口产生响应，不论哪一端口作为激励，哪一端口作为响应，其响应与激励的比值是相同的。根据激励与响应的不同可以有如下三

种形式，

形式 1 $\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{i_1}{u_{S2}}$

形式 2 $\frac{u_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{i_{S2}}$

形式 3 $\frac{i_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{u_{S2}}$

式中 $u_{S1}, u_{S2}, i_{S1}, i_{S2}$ 为激励电压、电流， u_1, u_2, i_1, i_2 为响应电压、电流。

应用互易定理时应注意：两次作用激励与响应四个量不能全是电压，也不能全是电流，只能有上述三种形式；含受控源的两端口网络一般不能使用互易定理，特殊情况除外。

互易定理的三种形式如图 2-2-22 所示。

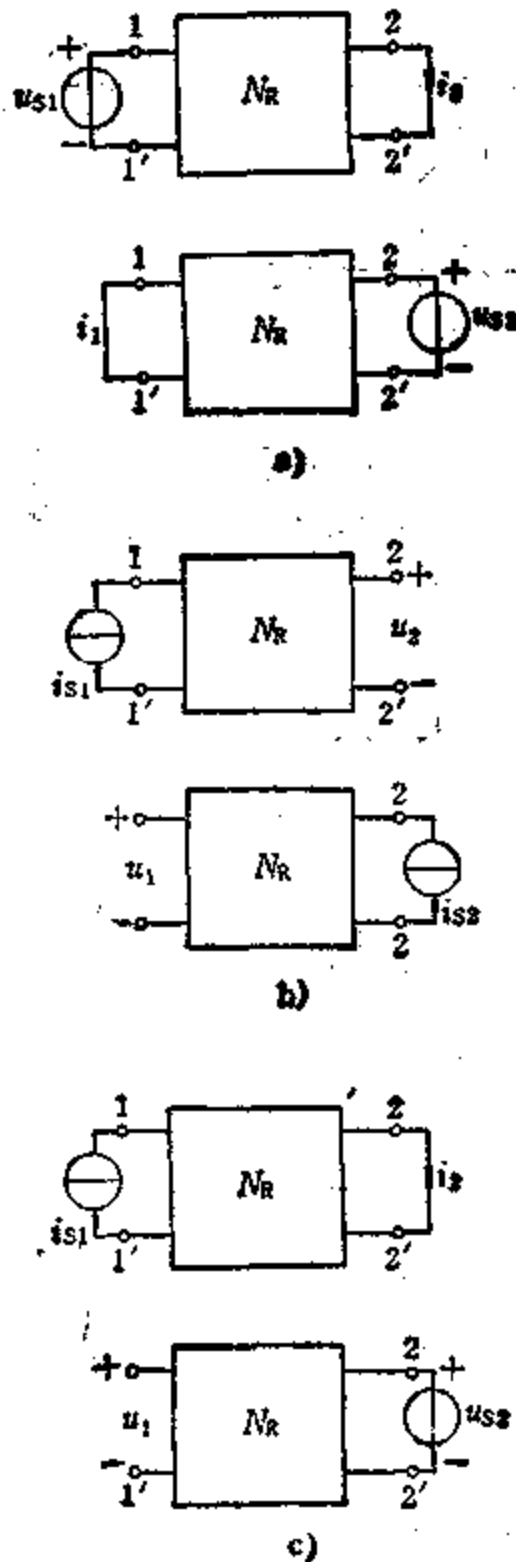


图 2-2-22 互易定理

a) 第一种形式 b) 第二种形式 c) 第三种形式

4 线性动态电路

4.1 动态电路

含有储能元件的电路称为动态电路，分析动态电路的依据仍然是基尔霍夫电压定律，基尔霍夫电流定律和元件的伏安关系。如果电路中所有元件都是线性的、非时变的，则描述动态电路中物理过程的方程是常系数线性微分方程。若描述电路的微分方程是 n 阶微分方程，则称此方程对应的动态电路为 n 阶动态电路。

动态电路在任一时刻的响应与激励的全部历史有关，即使激励不作用，仍可能有响应。

动态电路的分析有两种不同的方法：第一种方法是经典法，根据基尔霍夫电流定律、基尔霍夫电压定律和元件的伏安关系，建立电路的微分方程，然后求解微分方程；第二种方法是运算法，是将时域分析问题转化为复频域分析问题。

4.2 动态电路的各种响应

动态电路的响应可以根据激励与响应的因果关系分为零输入响应和零状态响应，也可以按电路的状态分为暂态响应（固有响应）和稳态响应（强制响应）。如图 2.2-23 所示为一阶电容电路，当 $t = 0$ 时，开关由 1 投向 2，且 $t = 0$ 时电容电压 $u_c(0) \neq 0$ ，其电容电压响应的形式见表 2.2-5 所示。

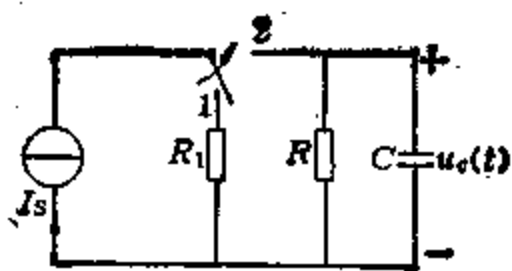


图 2.2-23 一阶电容电路

4.3 三要素法

三要素法是求解一阶动态电路的简便、实用的方法。是用初始值 $f(0_+)$ ，稳态值 $f(\infty)$ 及时间常数 τ 这“三要素”，不需列方程，直接列出响应的表达式。用三要素法列出的电压或电流响应的表达式的一般形式为：

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

表 2.2-5 一阶动态电路的各种响应

响应形式	分解方式	响应表达式
零输入响应	电路中外加激励为零，只由储能元件的初始储能产生的响应	$u_{c1}(t) = u_c(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ $t \geq 0$ 式中 $\tau = RC$
零状态响应	电路中储能元件的初始储能为零，仅由输入产生的响应	$u_{c2}(t) = I_S R (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ $t \geq 0$ 式中 $\tau = RC$
完全响应	电路的完全响应是由储能元件的初始储能和输入共同作用时产生的响应，即零输入响应与零状态响应之和，或看成暂态响应与稳态响应之和	$u_c(t) = u_{c1}(t) + u_{c2}(t)$ $= u_c(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + I_S R (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ $u_c(t) = u_{c3}(t) + u_{c4}(t)$ $= [u_c(0) - I_S R]e^{-\frac{t}{\tau}} + I_S R$ $t \geq 0$ 式中 $\tau = RC$
暂态响应（固有响应）	是电路在完全响应中由初始状态过渡到稳定状态期间起作用的部分，对应齐次方程的通解	$u_{c3}(t) = [u_c(0) - I_S R]e^{-\frac{t}{\tau}}$ $t \geq 0$ 式中 $\tau = RC$
稳态响应（强制响应）	是电路在完全响应中与输入有相同规律的分量称为强制响应，对应非齐次方程的特解	$u_{c4}(t) = I_S R$ $t \geq 0$

式中 $f(t)$ 为电路中的电压或电流响应； $f(0_+)$ 为电路响应在 $t = 0_+$ 时刻的值即初始值； $f(\infty)$ 为电路响应在 $t = \infty$ 时的值即稳态值； τ 为电路的时间常数。

其中， $f(0_+)$ ， $f(\infty)$ 和 τ 的求解步骤如下：

1. 求解 $f(0_+)$ $f(0_+)$ 是 $t = 0_+$ 瞬间支路电压或支路电流, 可由 $t = 0_+$ 等效电路求得。 $t = 0_+$ 等效电路是为计算 $t = 0_+$ 时电路中任一 支路电压或电流而取的等效电路, 只在 $t = 0_+$ 瞬间有效。

$t = 0_+$ 等效电路是根据换路时 (如开关动作等) 电容电流为有限值时电容电压不能发生跃变, 即 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$, 换路后的电容电压等于换路前的电容电压; 在 $t = 0_+$ 等效电路中用一个电压为 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 的电压源代替电容器, 电感电压为有限值时, 电感电流不能发生跃变, 即 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$, 在 $t = 0_+$ 等效电路中用一个电流为 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 的电流源代替电感。对其它支路, 在 $t = 0_+$ 等效电路中不变。然后求解 $t = 0_+$ 等效电路, 求得任一支路的电压或电流, 即 $f(0_+)$ 。

2. 求解 $f(\infty)$ $f(\infty)$ 是 $t = \infty$ 时支路的电压或电流, 可以由 $t = \infty$ 时的等效电路求得。 $t = \infty$ 时的等效电路是根据 $t = \infty$ 时, 电路已达到稳态, 电容电流为零, 相当于开路; 电感电压为零, 相当于短路, 因此在 $t = \infty$ 等效电路中, 电容用开路线代替, 电感用短路线代替, 其他支路不改变。然后, 由 $t = \infty$ 等效电路求出各支路电压或电流 $f(\infty)$ 。

3. 求解 τ τ 是一阶动态电路的时间常数, 在一阶电路中任一支路电压或电流都是遵循同一规律变化, τ 值是相同的。具有电容的一阶电路中 $\tau = RC$; 具有电感的一阶电路中 $\tau = \frac{L}{R}$ 。其中 R 是表示从动态元件的两端看入的二端网络的戴维南等效电路的内阻。

例 如图 2-2-24 a 所示电路, 假定换路前电路处于稳定状态, 当 $t = 0$ 时开关由 a 投向 b。求 $t \geq 0$ 时 $i(t)$, $i_L(t)$ 的解析式时, 用“三要素”法解题步骤如下:

1) 求 $i(0_+)$, $i_L(0_+)$ 由于换路前电路处于稳定状态, 电感相当于短路, 可分别求得:

$$i_L(0_-) = -\frac{3}{4} \text{ A}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = -\frac{3}{4} \text{ A}$$

$t = 0_+$ 时, 等效电路如图 2-2-24 b 所示, 电感相当于一个电流源, 电流为 $3/4 \text{ A}$ 。由此 $t = 0_+$ 等效电路可以求得

$$i(0_+) = \frac{1}{2} \text{ A}$$

2) $i(\infty)$, $i_L(\infty)$ 当 $t = \infty$ 时, 其等效电路如图 2-2-24 c 所示, 电感相当于短路, 求得:

$$i(\infty) = \frac{3}{2} \text{ A}$$

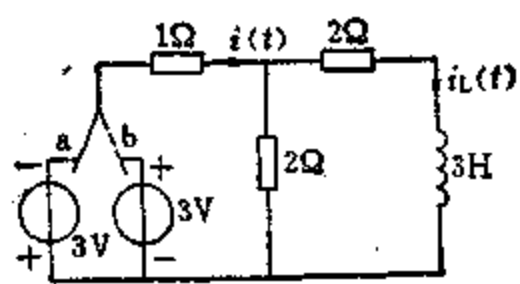
$$i_L(\infty) = \frac{3}{4} \text{ A}$$

3) 求 τ 开关由 a 投向 b 后, 从电感两端看进去的戴维南等效电路的内阻

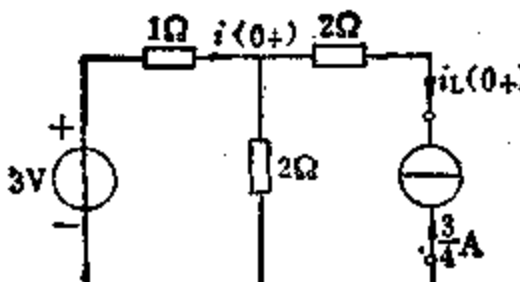
$$R = 2 + \frac{1 \times 2}{1 + 2} = \frac{8}{3} \Omega$$

因此

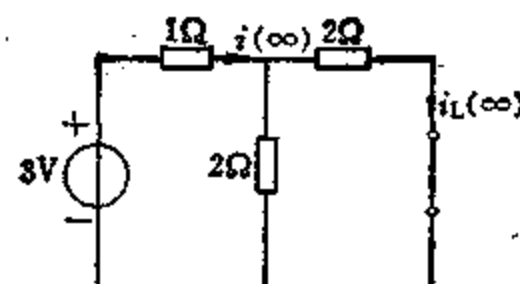
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{3}{\frac{8}{3}} = \frac{9}{8} \text{ s}$$



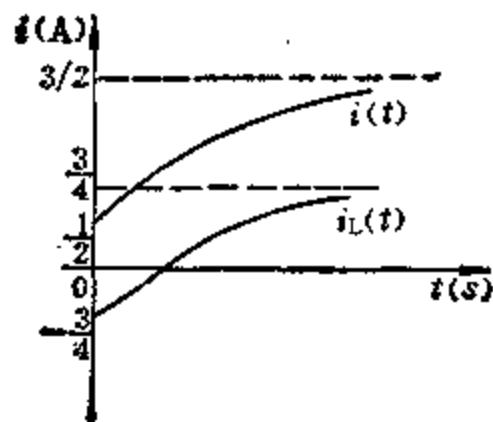
a)



b)



c)



d)

图 2-2-24 三要素法例图

a) 原电路 b) $t = 0_+$ 等效电路 c) $t = \infty$ 等效电路 d) $i(t)$, $i_L(t)$ 波形图

4) 写出 $i(t)$ 、 $i_L(t)$ 表达式 利用三要素法一般表达式 $f(t) = f(\infty) + [f(0+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$ 写出的 $i(t)$ 和 $i_L(t)$ 表达式分别为:

$$i(t) = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)e^{-\frac{8}{9}t}$$

$$= \frac{3}{2} - 1e^{-\frac{8}{9}t} \quad (\text{A}), t \geq 0.$$

$$i_L(t) = \frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)e^{-\frac{8}{9}t}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{2}e^{-\frac{8}{9}t} \quad (\text{A}), t \geq 0$$

$i(t)$ 、 $i_L(t)$ 波形图见图 2-2-24 d.

5 正弦稳态分析

5.1 正弦稳态响应

在正弦激励的动态电路中,若各电压、电流均为与激励同频率的正弦波,该电路称为正弦稳态电路,此时电路的响应称为正弦稳态响应。在正弦稳

态电路中,各电压、电流响应与激励为同频率的正弦波,因而可以采用相量形式来表示。对于求解正弦稳态响应的正弦时间函数的问题就可以简化为对相量的分析问题。

5.2 正弦量的相量表示

1. 交流电的有效值 交流电流的有效值是指在同一电阻上通过直流与交流电流,经过一个周期时间,它们在电阻上消耗的电能相等,则该直流电流的大小作为交流电流的有效值 I ,以下式表示:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

有效值有时称为方均根值。正弦交流电流的有效值

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707I_m$$

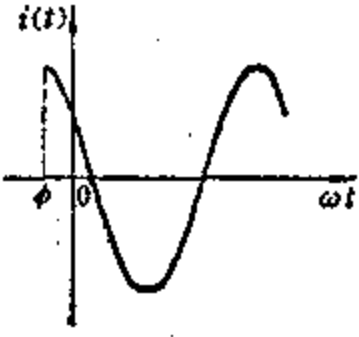
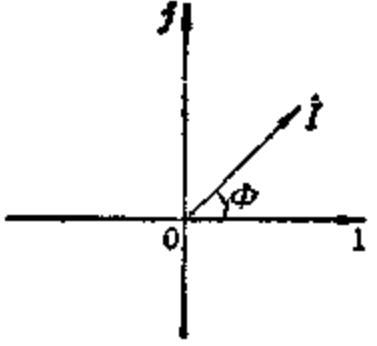
式中 I_m 为交流电流 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ 中的幅值。同理也可以得到正弦交流电压的有效值

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707U_m$$

2. 正弦量的相量表示 在正弦稳态电路中,

正弦稳态信号可以采用正弦时间函数表示,也可以用相量形式表示,它们之间的对应关系见表 2-2-6。

表 2-2-6 正弦信号的表示方法

表示方式	图形	表达式	参数
正弦时间函数 (瞬时值)表示		$i(t)$ $= \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi)$	I —有效值 ω —角频率 ϕ —初相角
相量表示		$I = I e^{j\phi}$	I —模值 ϕ —幅角 略去了旋转相量 $e^{j\omega t}$

所示。

正弦信号的正弦时间函数表示（瞬时值表示）与相量表达式之间的对应关系可以表示为：

$$I \leftrightarrow i(t)$$

式中“ \leftrightarrow ”表示电流相量与电流正弦时间函数表达式之间的对应关系，不是相等关系。

正弦信号的正弦时间函数表达式与相量表达式之间的关系可以表示为：

$$\begin{aligned} i(t) &= \text{Re}[I_m / \omega t] \\ &= \text{Re}[I_m e^{j\omega t}] \\ &= \text{Re}[I_m e^{j(\omega t + \phi)}] \\ &= \text{Re}[I_m \cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)] \end{aligned}$$

式中 I_m 为最大值（幅值）相量， $I_m = \sqrt{2} I \times / \phi = \sqrt{2} I e^{j\phi}$ ； $\text{Re}[\]$ 为对话框内以 t 为变量的复值函数取实部。

5.3 电路的相量模型

1. 相量模型 是一种运用相量法对正弦稳态电路进行分析，计算的电路模型，它和原电路具有相同的拓扑结构，原电路中的电压，电流分别用电压相量、电流相量表示，电容、电感及电阻等用阻抗或导纳表示。关于阻抗与导纳的表示方法见表 2-2-7 所示。

例 图 2-2-25 a 所示电路时域模型的相量模型如图 2-2-25 b 所示。

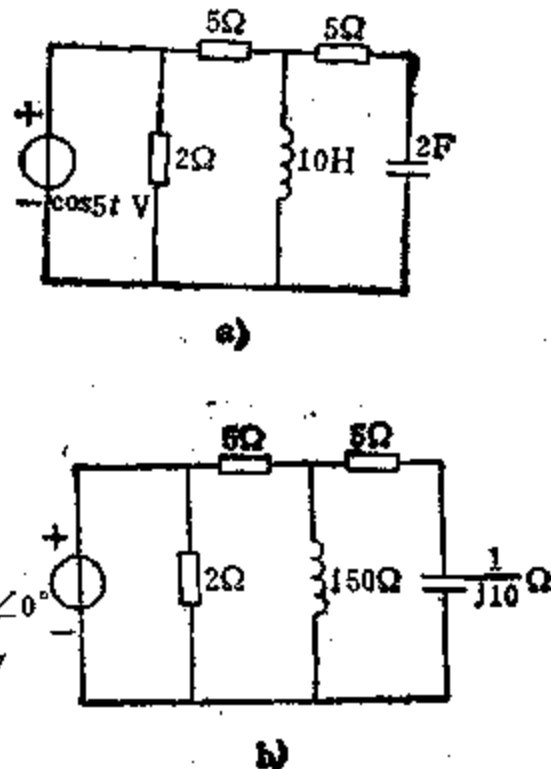


图 2-2-25 时域模型与相量模型

a) 时域模型 b) 相量模型

2. 阻抗与导纳 电阻、电感及电容在相量模型中用阻抗或导纳来表示。阻抗 Z 上的电压相量 \dot{U} 与电流相量 I 的关系可以根据欧姆定律的复数形式表示为：

$$Z = \frac{\dot{U}}{I}$$

电阻、电感及电容的阻抗、导纳及其电压相量与电流相量的关系见表 2-2-7。

表 2-2-7 阻抗与导纳

元件种类	电 阻 R	电 感 L	电 容 C
阻 抗	$Z_R = R$	$Z_L = j\omega L$	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$
导 纳	$Y_R = \frac{1}{R}$	$Y_L = \frac{1}{j\omega L}$	$Y_C = j\omega C$
伏安关系 相量表示	$\dot{U}_R = Z_R \dot{I}_R = R \dot{I}_R$ $\dot{I}_R = Y_R \dot{U}_R = \frac{\dot{U}_R}{R}$	$\dot{U}_L = Z_L \dot{I}_L = j\omega L \dot{I}_L$ $\dot{I}_L = Y_L \dot{U}_L = \frac{\dot{U}_L}{j\omega L}$	$\dot{U}_C = Z_C \dot{I}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C$ $\dot{I}_C = Y_C \dot{U}_C = j\omega C \dot{U}_C$
相量模型			

(续)

元件种类	电 阻 R	电 感 L	电 容 C
伏安关系时域波形			
伏安关系相量图			

注: Z_L 、 Z_C 为阻抗; Y_L 、 Y_C 为电纳。

5.4 正弦稳态电路的相量分析

运用相量法分析正弦稳态电路时,可按如下步骤进行:

(1) 写出已知正弦量的相量。

(2) 作出原电路的相量模型,其中电压、电流用相量表示;电阻、电感及电容用阻抗或导纳表示。利用基尔霍夫电压定律、基尔霍夫电流定律及元件的伏安关系的相量表达式列方程,解方程得出电压或电流相量。

(3) 根据求得的相量,写出相应的正弦时间函数表达式。

例 如图 2-2-26 a 所示的 RLC 串联电路,电压源电压 $u_s(t) = \sqrt{2}U_s \cos(\omega t + \phi_u)$ 。求解电流 $i(t)$ 的过程如下:

(1) 写出已知正弦量 $u_s(t) = \sqrt{2}U_s \cos(\omega t + \phi_u)$ 的相量,可用下式表示,

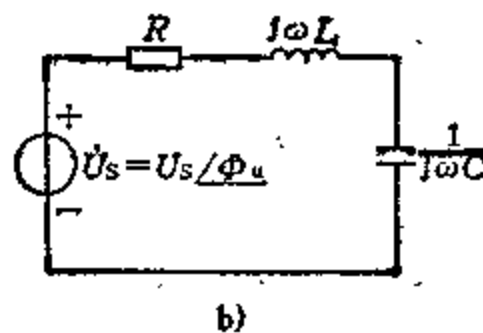
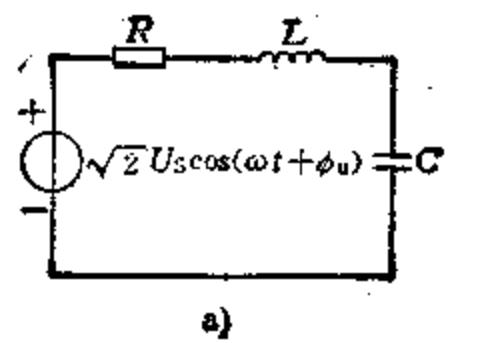


图 2-2-26 相量分析法例图
a) 时域模型 b) 相量模型

$$\dot{U}_s = U_s / \phi_s$$

式中 U_s 为正弦电压 $u_s(t)$ 的有效值; \dot{U}_s 为正弦电压 $u_s(t)$ 的有效值相量, 简称为 $u_s(t)$ 的相量。

(2) 由原电路的时域模型 (如图 2-2-26 a 所示) 绘出其相量模型图, 如图 2-2-26 b 所示。原电路中的 R 、 L 、 C 分别用 R 、 $j\omega L$ 及 $1/(j\omega C)$ 表示; 电压源电压 $u_s(t)$ 及电流 $i(t)$ 分别用电压相量 \dot{U}_s 及电流相量 \dot{I} 表示。根据直流电路中的分析方法, 对相量模型计算。其中 R 、 L 、 C 串联电路的总阻抗

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

电流相量

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{\dot{U}_s}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{U_s}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ &\quad \times \angle \phi_s - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{aligned}$$

$$= I / \phi_i$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } I &= U_s / \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \\ \phi_i &= \phi_s - \arctg \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) / R \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 电流 } i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } i(t) &= \frac{\sqrt{2} U_s}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ &\quad \times \cos \left(\omega t + \phi_s - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \end{aligned}$$

5.5 正弦稳态电路的功率

1. 正弦稳态电路的功率 无源两端口网络端口处的电压和电流参考方向如图 2-2-27 所示。其正弦稳态电路吸收的功率见表 2-2-8。

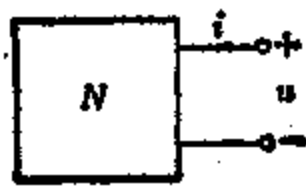


图 2-2-27 正弦稳态电路的功率

表 2-2-8 正弦稳态电路的功率

名称	符号	单位	公式	说明
瞬时功率	p	瓦 (特) W	$p = ui$	
功率 (有功功率) 平均功率	P	瓦 (特) W	$P = UI \cos \theta_z = I^2 \operatorname{Re} Z$ $= U^2 \operatorname{Re} Y$	$P = \sum P_k = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ 总有功功率等于各支路有功功率之和
无功功率	Q	乏 var	$Q = UI \sin \theta_z = I^2 \operatorname{Im} Z$ $= -U^2 \operatorname{Im} Y = I_m(UI)$	$Q = \sum Q_k = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$ 总无功功率等于各支路无功功率代数之和
视在功率	S	伏安 VA	$S = UI = I^2 Z = U^2 Y $ $= \dot{U}\dot{I} $	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $S \neq S_1 + S_2 + \dots + S_n$
复功率	\tilde{S}	伏安 VA	$\tilde{S} = (\dot{U}\dot{I}) = P + jQ$	
功率因数	λ		$\lambda = \cos \theta_z = \frac{P}{S} = \frac{R}{ Z } = \frac{G}{ Y }$	

注: \tilde{I} 是 I 的共轭复数。

2. 正弦稳态电路最大功率传输 正弦稳态电路中, 当负载变化时, 在负载上获得最大功率的条件可分为两种情况: 一种是负载阻抗的实部、虚部可以分别变化; 另一种是负载模值可变, 幅角不变, 这种情况下并非可能达到在负载上获得的最大功率, 如果幅角仍可变化, 则可达到最大功率。正弦稳态电路的最大功率传输情况见表 2-2-9 所示。

在直流电路中, 负载电阻与信号源内阻相等时 ($R_L = R_s$), 达到最大功率传输, 称之为匹配。

5.6 谐振与频率特性

1. 谐振 如果含有 LC 电路的固有频率与正弦激励的频率相同, 此时电路将产生具有极大振幅的响应, 部分简单电路的固有频率如表 2-2-10 所示。

2. 频率特性 亦称频率响应, 系指在正弦稳态条件下, 网络响应的复数式与网络激励的复数式

之比, 它是频率的函数, 可表示为:

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

式中 $H(j\omega)$ 为频率 ω 的复数式, 表示网络函数的频率特性; $R(j\omega)$ 为网络响应的复函数; $E(j\omega)$ 为网络激励的复函数; $|H(j\omega)|$ 为网络函数 $H(j\omega)$ 的模值是 ω 的函数; $\theta(\omega)$ 为网络函数 $H(j\omega)$ 的幅角, 是 ω 的函数。

$H(j\omega)$ 的幅值 (模值) 随激励源频率的变化称为幅度频率特性, 简称幅频特性。

$H(j\omega)$ 的幅角随激励源频率的变化称为相位频率特性, 简称相频特性。

当网络的响应与激励在同一端口时, 常称为策动点函数, 如谐振特性等, 见表 2-2-10。当网络的响应与激励不在同一端口时, 常称为转移函数, 见表 2-2-11。

表 2-2-9 正弦稳态电路最大功率传输

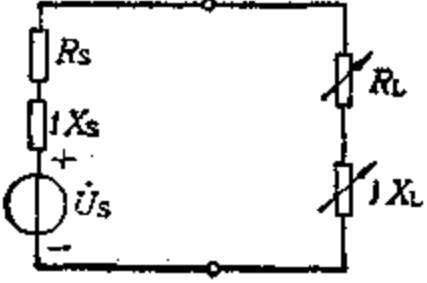
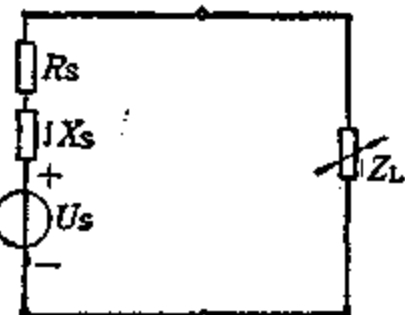
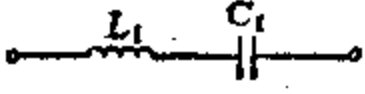
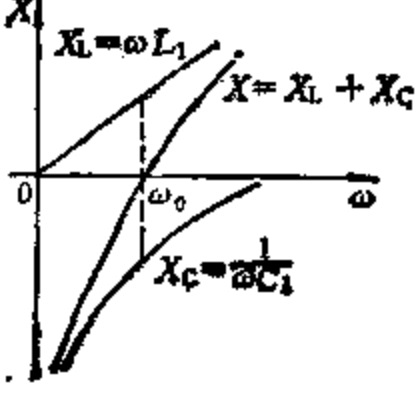

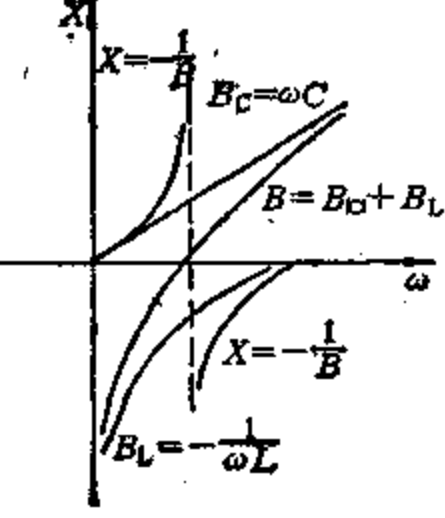
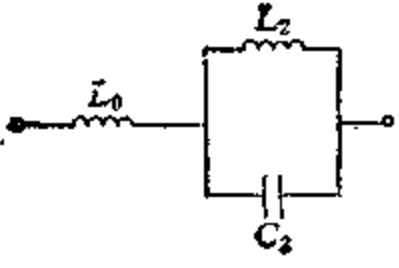
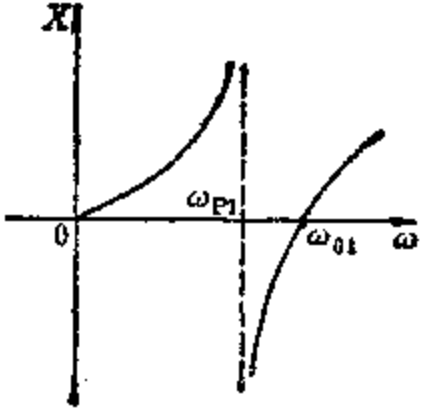
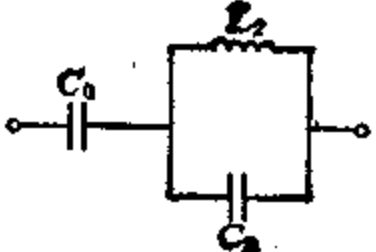
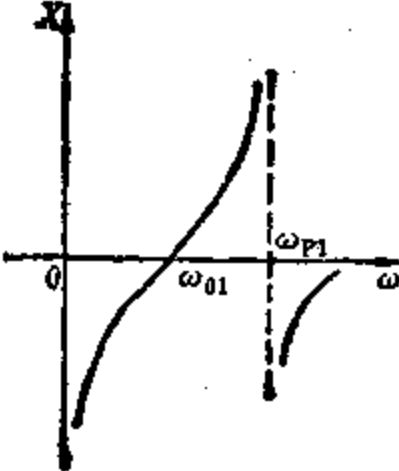
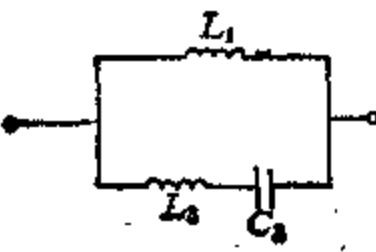
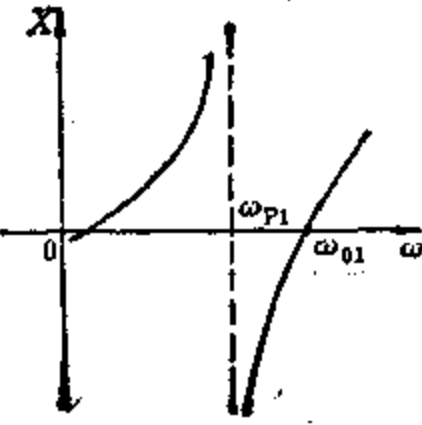
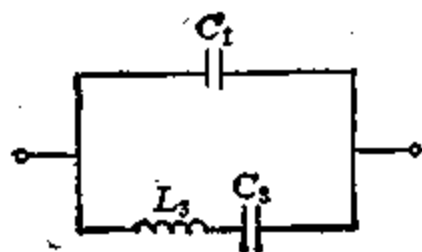
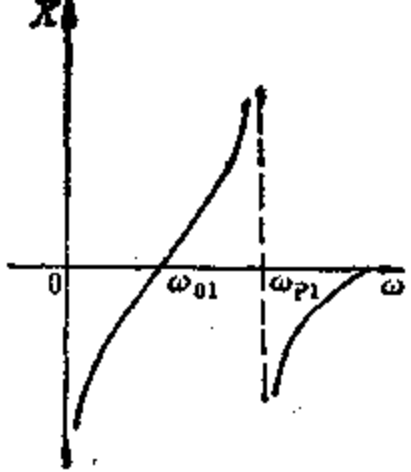
电 路 图	信号源内阻抗	负载阻抗变化条件	负载获得最大功率的条件
	信号源内阻抗 $Z_s = R_s + jX_s$ 不变	负载阻抗 $Z_L = R_L + jX_L$ 中的实部、虚部, R_L 、 X_L 可以分别变化	当 $R_L = R_s$ 及 $X_L = -X_s$ 时, 可以在负载上获得最大 功率
	信号源内阻抗 $Z_s = R_s + jX_s = Z_s /\theta_s$ 不变	负载阻抗 $Z_L = Z_L /\theta_L$ 中 $ Z_L $ 可变, θ_L 不变	当 $ Z_L = Z_s = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$ 时, 负载 Z_L 上可以获得最 大功率

表2-2-10 电路的谐振

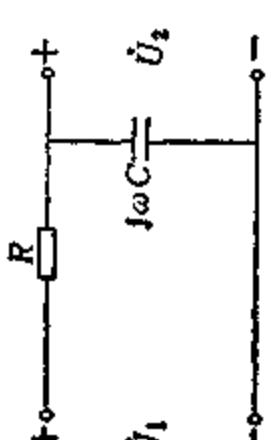
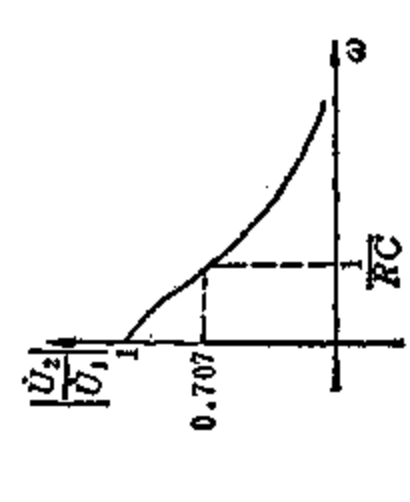
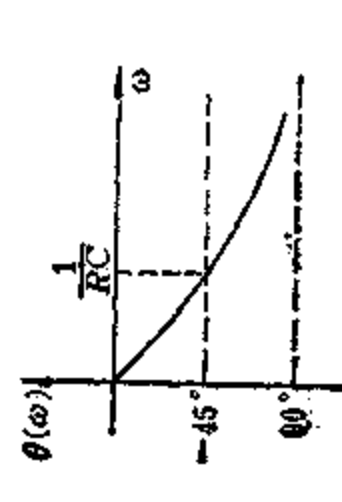
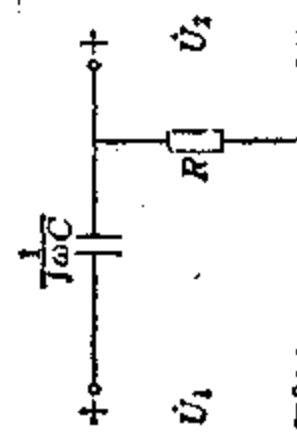
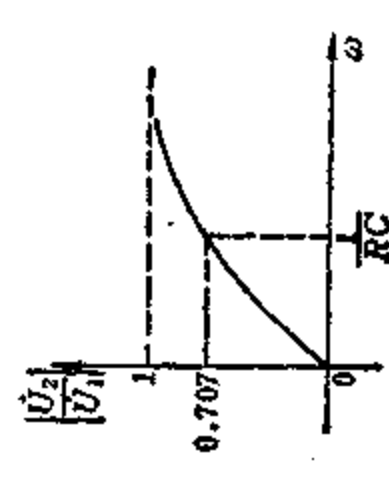
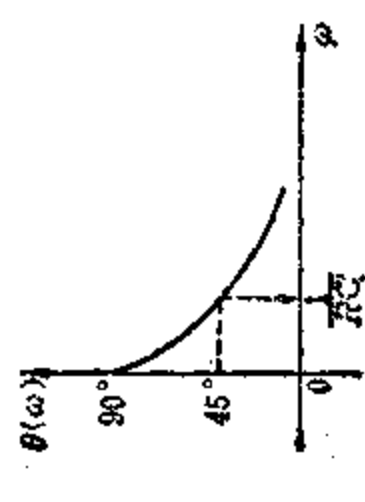
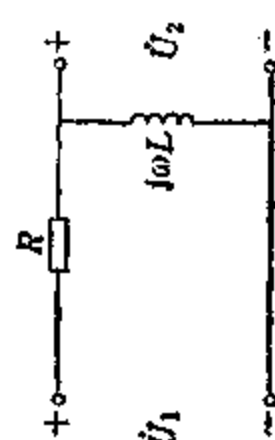
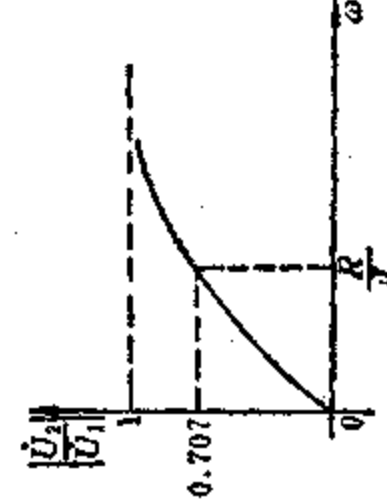
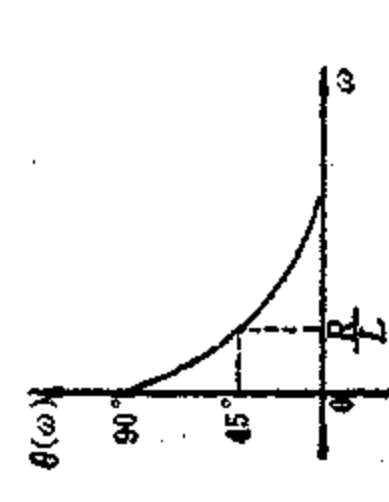
电 路 图	输入阻抗表达式	频率曲线	谐振角频率表达式
	$Z(j\omega) = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$		$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$
	$Z(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L_1} + j\omega C_1}$		$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$
	$Z(j\omega) = j\omega H \frac{\omega^2 - \omega_{01}^2}{\omega^2 - \omega_p^2}$ <p>其中 $H = L_0$</p>		$\omega_{01} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_0 L_2 C_2}}$ $\omega_{p1} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$

(续)

电 路 图	输入阻抗表达式	频率曲线	谐振角频率表达式
	$Z(j\omega) = j\omega H \frac{\omega^2 - \omega_{01}^2}{-\omega^2(\omega^2 - \omega_{p1}^2)}$ $H = \frac{C_0 + C_2}{C_0 C_2}$		$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_2(C_0 + C_2)}}$ $\omega_{p1} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$
	$Z(j\omega) = j\omega H \frac{\omega^2 - \omega_{01}^2}{\omega^2 - \omega_{p1}^2}$ $H = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$		$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ $\omega_{p1} = \frac{1}{\sqrt{C_2(L_1 + L_2)}}$
	$Z(j\omega) = j\omega H \frac{\omega^2 - \omega_{01}^2}{-\omega^2(\omega^2 - \omega_{p1}^2)}$ $H = \frac{1}{C_1}$		$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ $\omega_{p1} = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L_2}}$

注： ω_p 、 ω_0 分别为并联谐振角频率、串联谐振角频率。

表2-2-11 几种常见电路的频率特性

电 路	传输函数	幅频特性表达式	幅频特性曲线	相频特性表达式	相频特性曲线
	$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$	$\left \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$		$\theta(\omega) = -\tan^{-1} \omega CR$	
	$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$ $= \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}}$	$\left \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}}$		$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{1}{\omega CR}$	
	$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + \frac{R}{j\omega L}}$	$\left \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}}$		$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{R}{\omega L}$	

	$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R}}$	$\left \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}}$		$\theta(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$	
	$\frac{j}{\dot{U}} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$	$\left \frac{j}{\dot{U}} \right = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$		$\theta(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$	
	$\frac{\dot{U}}{j} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$	$\left \frac{\dot{U}}{j} \right = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$		$\theta(\omega) = -\tan^{-1} R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$	

3. Q值 元件和谐振回路的品质因数Q值

分别定义如下:

器件品质因数

$$Q = 2\pi \frac{\text{器件中储存的最大能量}}{\text{每周期内器件消耗的能量}}$$

谐振回路的品质因数

$$Q = 2\pi \frac{\text{在谐振条件下回路里储存的能量}}{\text{在谐振条件下每周期内消耗的能量}}$$

表2-2-12列出了常见电路Q值的计算公式。

4. 有载Q值和无载Q值 在如图2-2-28所示电路中, 当 $R_L = \infty$, $R_S = \infty$ 时, 仅由 R_0 、 L 及 C 构成的谐振电路的品质因数称为无载Q值; 当 R_L 、 R_S 不为无穷大时, 回路总的Q值称为有载Q值。分别表示如下:

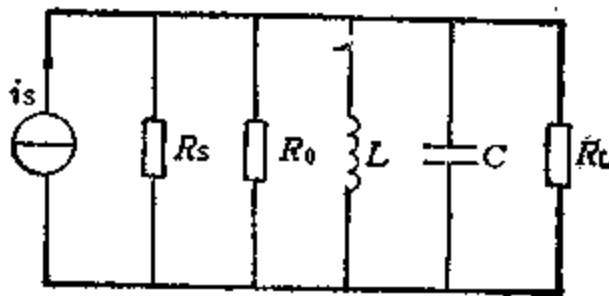


图2-2-28 谐振回路的有载Q值与无载Q值

无载Q值

$$Q_0 = \frac{R_0}{\omega_0 L}$$

有载Q值 $Q_L = \frac{R_{\Sigma}}{\omega_0 L} = \frac{1}{\omega_0 L G_{\Sigma}}$

$$= \frac{1}{\omega_0 L (G_0 + G_L + G_S)}$$

表2-2-12 常见电路的Q值计算

电 路		Q值计算公式	电 路		Q值计算公式	
元 器 件 Q 值		$Q = \frac{\omega L}{r}$	元 器 件 Q 值		$Q = \frac{1}{\omega C r}$	
		$Q = \frac{R}{\omega L}$		谐 振 回 路 Q 值		$Q = \frac{R}{\omega_0 L}$ 其中 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
		$Q = \omega C R$				$Q = \frac{\omega_0 L}{r}$ 其中 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

有载Q值与无载Q值的关系为:

$$Q_L = \frac{Q_0}{1 + \frac{R_0}{R_S} + \frac{R_0}{R_L}}$$

5. 接入系数 并联谐振回路与负载或信号源相接时, 为达到谐振阻抗与信号源内阻相匹配及减小信号源内阻或负载电阻对谐振回路的有载Q值的影响, 常采用部分接入的连接方式。在双电容或双电感并联谐振电路中, 将电容或电感的电抗一分为二, 只将其一部分接信号源, 接信号源这一部分电抗值与这一元件的总电抗值之比, 称为并联谐振回路的接入系数 P 。表2-2-13列出了几种典型电路的接入系数, 及负载电阻等效变换到并联谐振回路上时的值。

例 如图2-2-29所示电路, 其中, $f_0 = 8.7$ MHz; $R_0 = 20\text{k}\Omega$; 无载Q值 $Q_0 = 100$; 信号源内阻 $R_S = 4\text{k}\Omega$; 负载电阻 $R_L = 2\text{k}\Omega$ 。当 n_0 与部分接入的匝数 n_1 、 n_2 之比为 $n_0:n_1:n_2 = 1:0.314:0.224$ 时, 折合到谐振回路两端的电阻分别为:

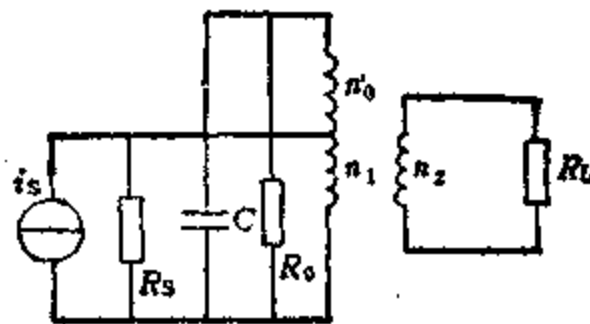


图2-2-29 部分接入例图

$$R'_S = \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2 R_S = 40\text{k}\Omega$$

$$R'_L = \left(\frac{n_0}{n_2}\right)^2 R_L = 40\text{k}\Omega$$

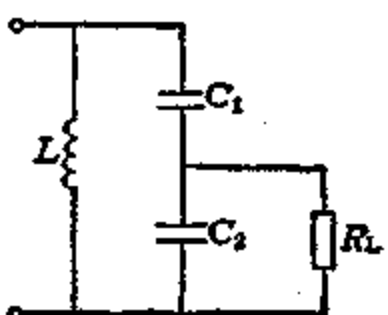
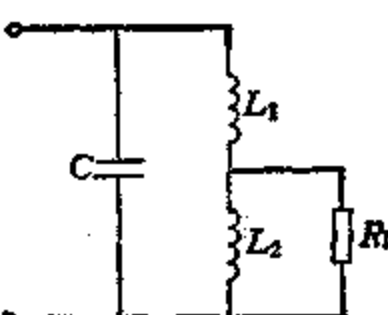
有载Q值 $Q_L = \frac{Q_0}{1 + \frac{R_0}{R'_S} + \frac{R_0}{R'_L}} = 56$

通频带 $B_1 = \frac{f_0}{Q} = 174 \text{ kHz}$

表2-2-13 接入系数

电路型式	电路图	折合电阻	接入系数 P
变压器		$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L$	$\frac{N_2}{N_1}$
自耦变压器		$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L$	$\frac{N_2}{N_1}$

(续)

电路型式	电路图	折合电阻	接入系数 P
双电容		$\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1}\right)^2 R_L$ $R_L \gg \frac{1}{\omega C_2}$	$\frac{C_1}{C_1 + C_2}$
双电感		$\left(\frac{L_1 + L_2}{L_2}\right)^2 R_L$ $R_L \gg \omega L_2$	$\frac{L_2}{L_1 + L_2}$

6. 通频带 如图2·2-30所示, 当激励频率偏离谐振频率时, 谐振电路获得的功率将下降。当激励频率为 f_1 、 f_2 时, 电路获得的功率为谐振时获得的功率的二分之一, 则称频率 f_1 、 f_2 分别为下半功率点、上半功率点频率。由 f_1 到 f_2 的频率范围叫做通频带, 用 B_f 表示, 即

$$B_f = f_2 - f_1$$

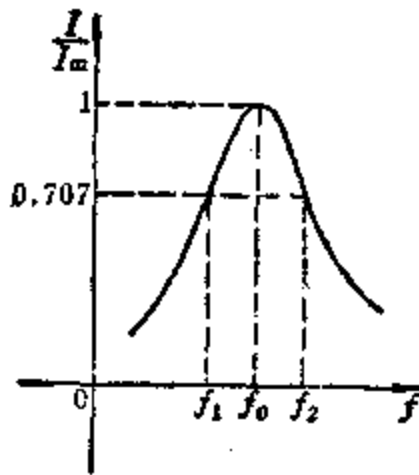


图2·2-30 通频带

当 f_0 、 f_1 、 f_2 相差不大的情况下, 通频带可以近似地表示为:

$$B_f = f_2 - f_1 \approx \frac{f_0}{Q}$$

式中 f_0 为谐振频率; Q 为谐振回路 Q 值。

当激励频率在 f_1 、 f_2 时, 电路中的电流或电压将下降为谐振时的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 0.707 倍。

对于如图2·2-31所示双调谐电路的通频带是以中间凹下部分不低于最大值的0.707倍时的上半功率点和下半功率点的频率差计为通频带。

7. 双谐振电路 互感耦合双谐振电路与电容耦合双谐振电路有相似的幅频特性和相频特性。互感耦合双谐振电路的等效电路如图2·2-32所示。当 $\omega_{01} = \omega_{02}$ 、 $Q_1 = Q_2$ 时, 在谐振频率附近的幅频特性曲线和相频特性曲线如图2·2-33所示。

图中 A 定义为

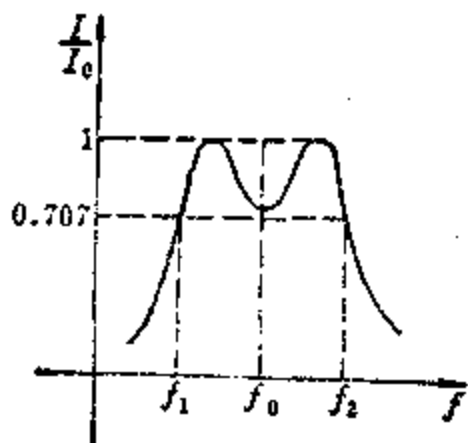


图2-2-31 双调谐电路的通频带

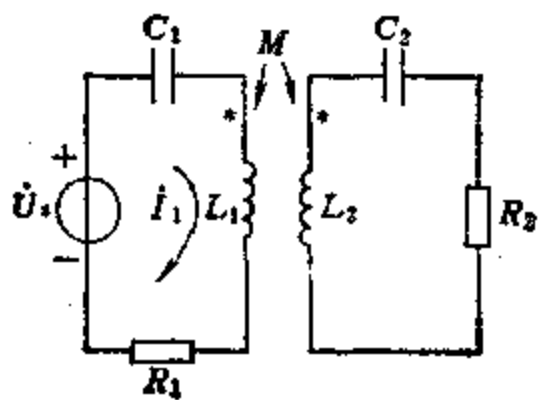


图2-2-32 互感耦合双谐振电路

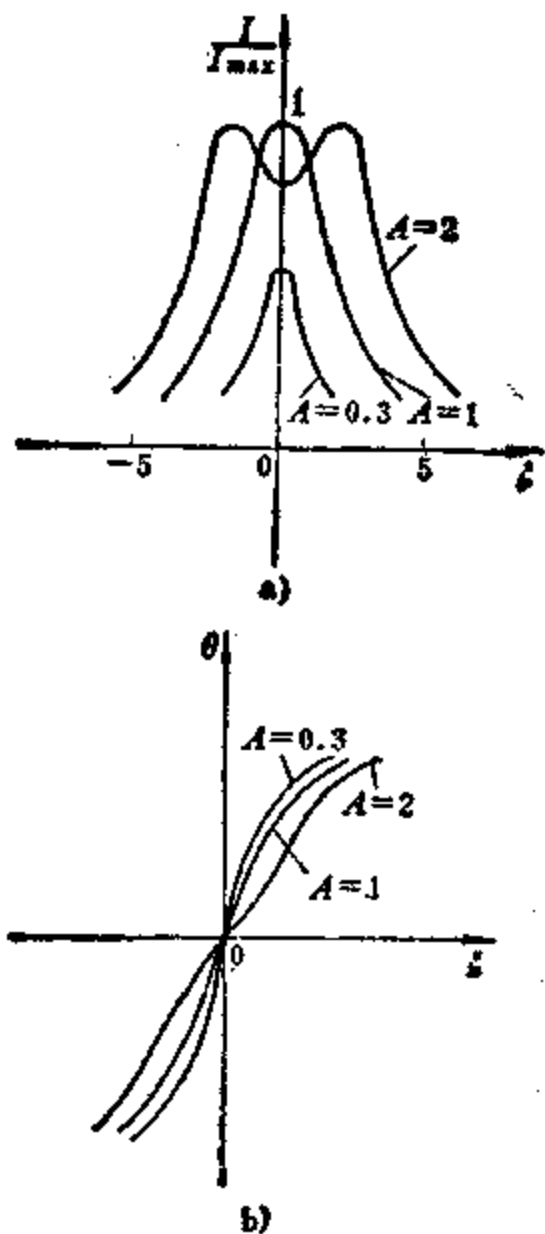


图2-2-33 耦合谐振回路的谐振曲线
a) 幅频特性曲线 b) 相频特性曲线

$$A = \frac{k}{k_c}$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$$

$$k_c = \frac{\sqrt{R_{11}R_{22}}}{\omega L_1 \omega L_{22}} = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}}$$

$$Q_1 = \frac{\omega L_{11}}{R_{11}}$$

$$Q_2 = \frac{\omega L_{22}}{R_{22}}$$

式中 k 为耦合系数； k_c 为临界耦合系数； Q_1 为一次回路 Q 值， Q_2 为二次回路 Q 值。

当 $Q_1 = Q_2 = Q$ 时

$$k_c = \frac{1}{Q}$$

图2-2-33中的横坐标用一般失谐 ξ 表示，它和角频率的关系为

$$\xi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

5.7 三相正弦交流电路

如图2-2-34所示三相交流电源，可以连接成星形（Y），也可以连接成三角形（ Δ ）。与三相电源连接的负载，可以接成星形，也可以接成三角形，

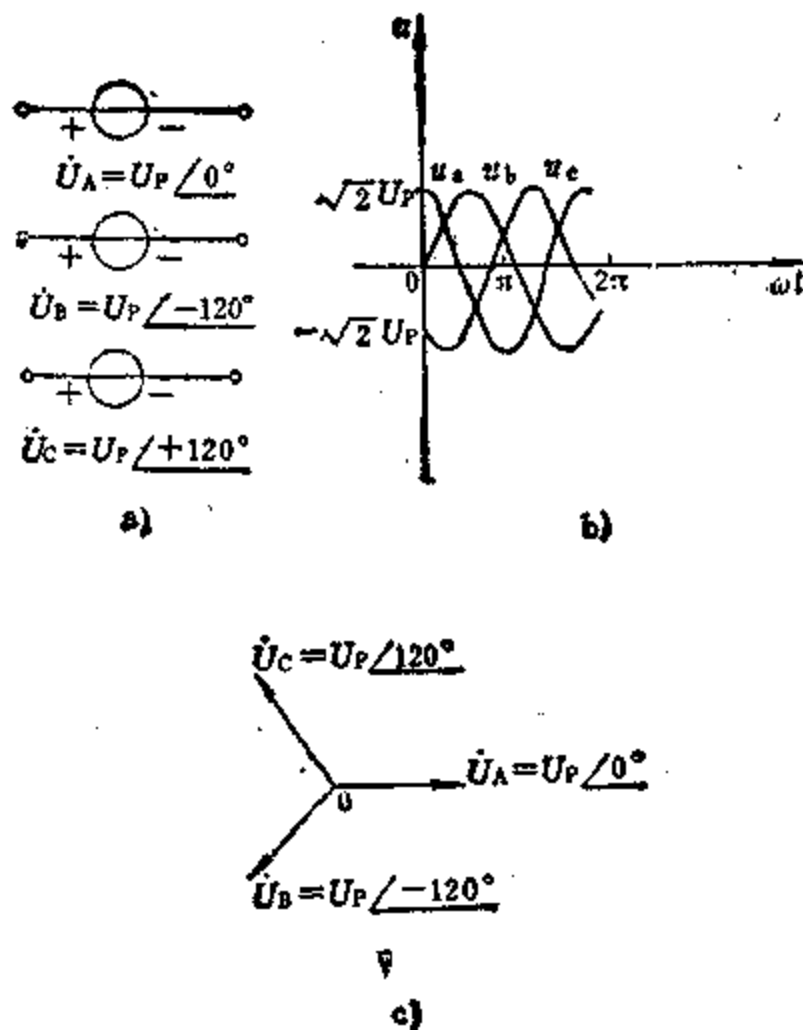


图2-2-34 对称三相电压源

a) 对称三相电压源 b) 对称三相电压源波形图
c) 对称三相电压源相量图

表2-2-14 对称三相电路

	星形连接	三角形连接
电路图		
相量图		
负载阻抗	$Z = Z /\theta$	$Z = Z /\theta$
相电压	$\dot{U}_A = U_P / 0^\circ$ $\dot{U}_B = U_P / -120^\circ$ $\dot{U}_C = U_P / 120^\circ$	$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A = U_P / 0^\circ$ $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B = U_P / -120^\circ$ $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C = U_P / 120^\circ$
线电压	$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = \sqrt{3} U_P / 30^\circ = U_L / 30^\circ$ $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = \sqrt{3} U_P / -90^\circ = U_L / -90^\circ$ $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = \sqrt{3} U_P / 150^\circ = U_L / 150^\circ$	$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A = U_L / 0^\circ$ $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B = U_L / -120^\circ$ $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C = U_L / 120^\circ$
相电流	$i_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{U_P}{ Z } / -\theta = I_P / -\theta$ $i_B = \frac{\dot{U}_B}{Z} = \frac{U_P}{ Z } / -\theta - 120^\circ = I_P / -\theta - 120^\circ$ $i_C = \frac{\dot{U}_C}{Z} = \frac{U_P}{ Z } / -\theta + 120^\circ = I_P / -\theta + 120^\circ$	$i_1 = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{U_P}{ Z } / -\theta = I_P / -\theta$ $i_2 = \frac{\dot{U}_B}{Z} = \frac{U_P}{ Z } / -\theta - 120^\circ = I_P / -\theta - 120^\circ$ $i_3 = \frac{\dot{U}_C}{Z} = \frac{U_P}{ Z } / -\theta + 120^\circ = I_P / -\theta + 120^\circ$

(续)

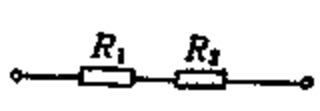
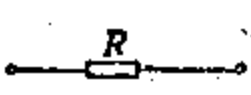
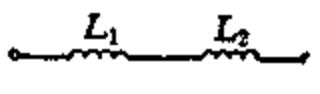
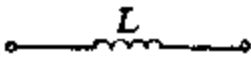
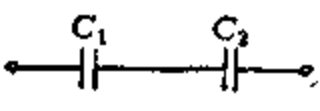
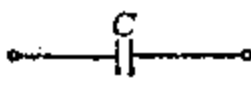
	星形连接	三角形连接
线电流	$i_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = I_P / -\theta = I_l / -\theta$ $i_B = \frac{\dot{U}_B}{Z} = I_P / -\theta - 120^\circ = I_l / -\theta - 120^\circ$ $i_C = \frac{\dot{U}_C}{Z} = I_P / -\theta + 120^\circ = I_l / -\theta + 120^\circ$	$i_A = i_1 - i_3 = \sqrt{3} I_P / -\theta - 30^\circ = I_l / -\theta - 30^\circ$ $i_B = i_2 - i_1 = \sqrt{3} I_P / -\theta - 150^\circ = I_l / -\theta - 150^\circ$ $i_C = i_3 - i_2 = \sqrt{3} I_P / -\theta + 90^\circ = I_l / -\theta + 90^\circ$
中线电流	$i_N = 0$	无中线
线电流和	$i_A + i_B + i_C = 0$	$i_A + i_B + i_C = 0$
单相功率	$P_P = U_P I_P \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} U_l I_l \cos \theta$	$P_P = U_P I_P \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} U_l I_l \cos \theta$
总功率	$P = 3 P_P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \theta$	$P = 3 P_P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \theta$
总瞬时功率	$P = 3 P_P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \theta$ 总瞬时功率恒定	$P = 3 P_P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \theta$ 总瞬时功率恒定

表2-2-14列出了对称三相电路的星形、三角形连接方式下的电压，电流及功率。

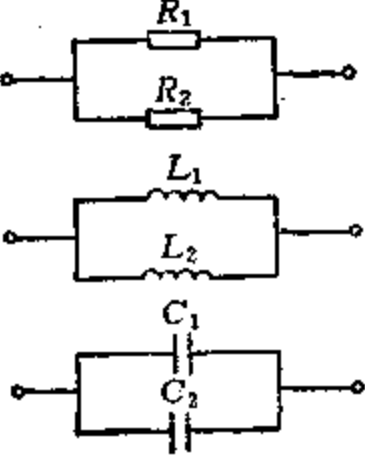
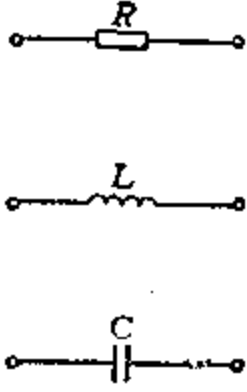
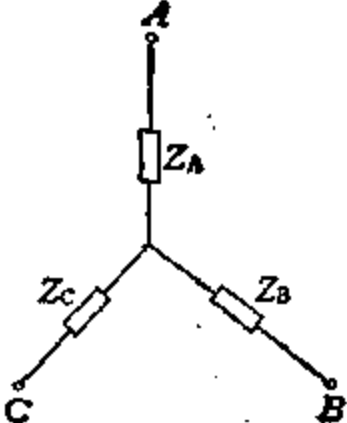
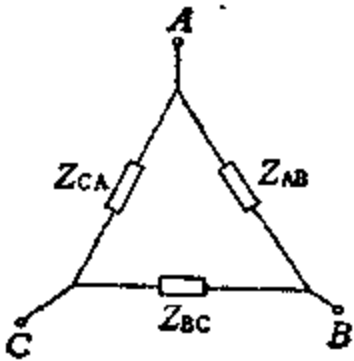
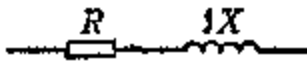
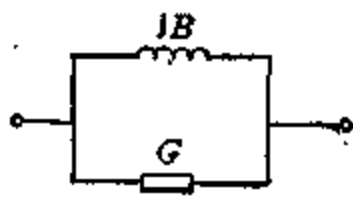
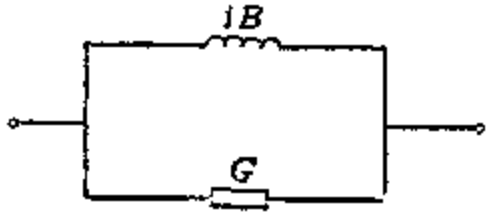
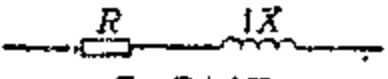
5-8 电路的等效变换

常见电路的等效变换见表2-2-15所示。电路的等效变换是指变换前后对外电路等效。

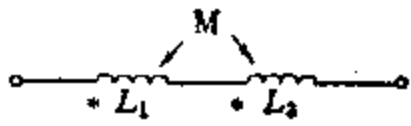
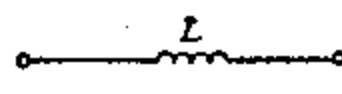
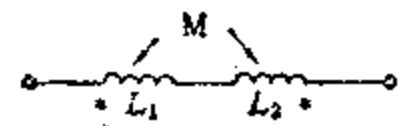
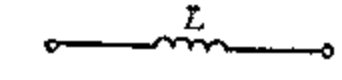
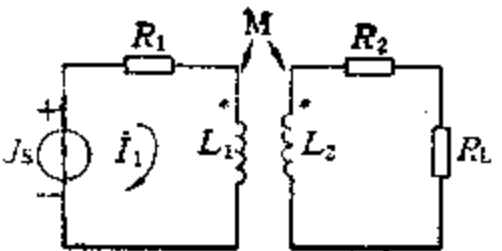
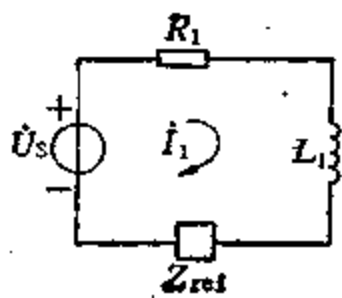
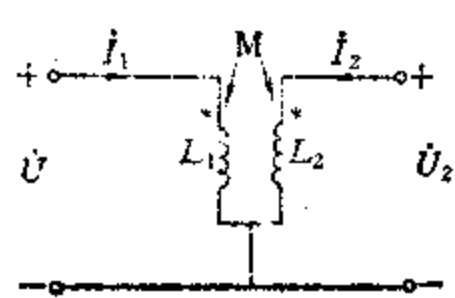
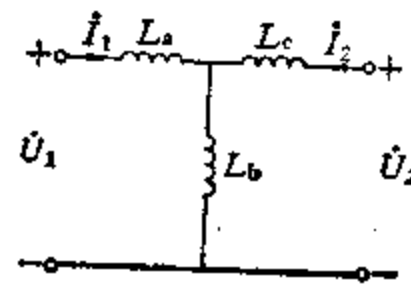
表2-2-15 电路的等效变换

	原电路	等效电路	变换公式
串联等效电路			$R = R_1 + R_2$
			$L = L_1 + L_2$
			$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

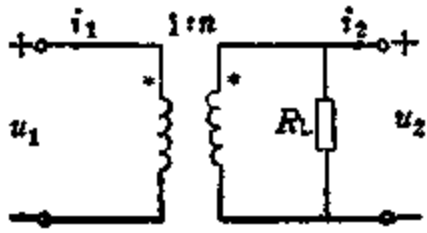
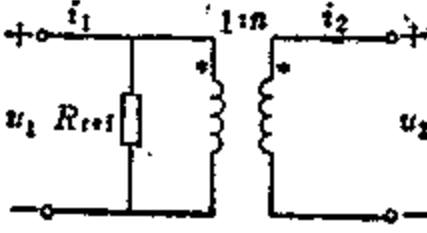
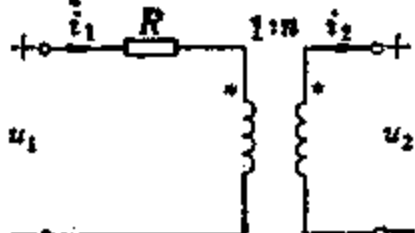
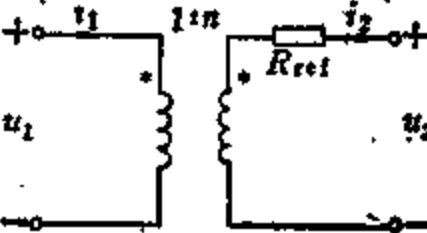
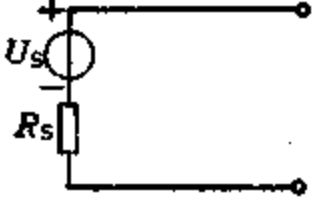
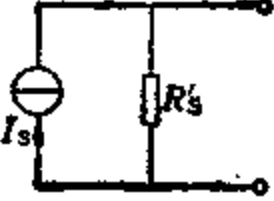
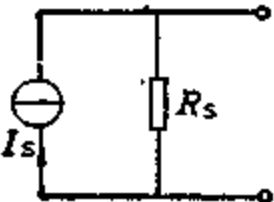

(续)

	原 电 路	等 效 电 路	变 换 公 式
<p>并联等效电路</p>			$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ $L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ $C = C_1 + C_2$
<p>星形与三角形连接间的变换</p>			$Z_{AB} = \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_A Z_C}{Z_C}$ $Z_{BC} = \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_A Z_C}{Z_A}$ $Z_{CA} = \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_A Z_C}{Z_B}$ $Z_A = \frac{Z_{AB} Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}$ $Z_B = \frac{Z_{BC} Z_{AB}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}$ $Z_C = \frac{Z_{CA} Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}$
<p>阻抗的串联→并联</p>	 $Z = R + jX$		$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$ $B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$
<p>阻抗的并联→串联</p>		 $Z = R + jX$	$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$ $X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$

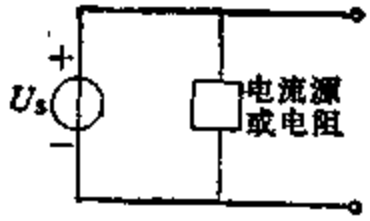
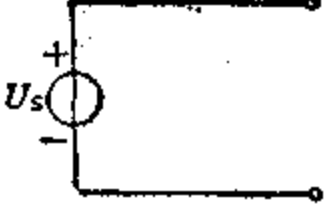

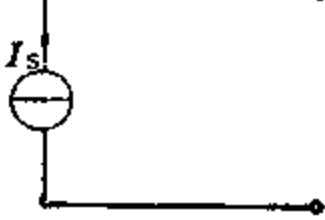
(续)

	原 电 路	等 效 电 路	变 换 公 式
耦合电感的顺接串联			$L = L_1 + L_2 + 2M$
耦合电感的反接串联			$L = L_1 + L_2 - 2M$
耦合电感的反映阻抗			$Z_{ref} = \frac{\omega^2 M^2}{R_L + R_2 + j\omega L_2}$
耦合电感的去耦等效变换			$L_a = L_1 - M$ $L_b = M$ $L_c = L_2 - M$

(续)

	原 电 路	等 效 电 路	变 换 公 式
变压器的阻抗变换二次↓一次			$R_{ref} = \frac{1}{n^2} R_L$
变压器的阻抗变换一次↓二次			$R_{ref} = n^2 R$
电压源与电阻串联↓电流源与电阻并联			$I_s = \frac{U_s}{R_s}$ $R'_s = R_s$
电流源与电阻并联↓电压源与电阻串联			$U_s = I_s R_s$ $R'_s = R_s$

(续)

	原 电 路	等 效 电 路	变 换 公 式
与电压源并联的元件为多余元件			
与电流源串联的元件为多余元件			

6 二端口网络

6.1 二端口网络的参数和方程

二端口网络的参数和方程用来表征二端口网络端口电压、电流之间的关系。二端口网络端口处的电压、电流的参考方向如图2-2-35所示， \dot{U}_1 、 \dot{I}_1 、 \dot{U}_2 、 \dot{I}_2 分别为入口、出口处的电压、电流相量。设其中两个为自变量，其余两个为应变量，共有六组表示二端口网络端口处的电压、电流关系的方程，六组方程中的系数分别称为二端口网络的参数。二端口网络的参数和方程见表2-2-16。表2-2-17、表2-2-18分别列出了几种常见二端口网络的网络参数和网络参数之间的变换关系。

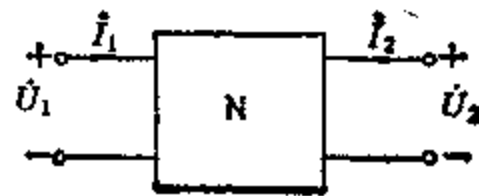


图2-2-35 二端口网络

6.2 二端口网络的等效电路

部分二端口网络参数的等效电路如表2-2-19所示。

表 2-2-16 二端口网络参数及方程

参数名称	方程	矩阵形式	参数物理意义	互易网络	互易、对称网络
Z 参数 (开路阻抗参数)	$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2 \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{i_1} \right _{i_2=0} & Z_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{i_2} \right _{i_1=0} \\ Z_{21} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{i_1} \right _{i_2=0} & Z_{22} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{i_2} \right _{i_1=0} \end{aligned}$	$Z_{12} = Z_{21}$	$\begin{aligned} Z_{12} &= Z_{21} \\ Z_{11} &= Z_{22} \end{aligned}$
Y 参数 (短路导纳参数)	$\begin{aligned} i_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ i_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} Y_{11} &= \left. \frac{i_1}{\dot{U}_1} \right _{\dot{U}_2=0} & Y_{12} &= \left. \frac{i_1}{\dot{U}_2} \right _{\dot{U}_1=0} \\ Y_{21} &= \left. \frac{i_2}{\dot{U}_1} \right _{\dot{U}_2=0} & Y_{22} &= \left. \frac{i_2}{\dot{U}_2} \right _{\dot{U}_1=0} \end{aligned}$	$Y_{12} = Y_{21}$	$\begin{aligned} Y_{12} &= Y_{21} \\ Y_{11} &= Y_{22} \end{aligned}$
H 参数 (混合参数)	$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= h_{11}i_1 + h_{12}\dot{U}_2 \\ i_2 &= h_{21}i_1 + h_{22}\dot{U}_2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{i_1} \right _{\dot{U}_2=0} & h_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right _{i_1=0} \\ h_{21} &= \left. \frac{i_2}{i_1} \right _{\dot{U}_2=0} & h_{22} &= \left. \frac{i_2}{\dot{U}_2} \right _{i_1=0} \end{aligned}$	$h_{12} = -h_{21}$	$\begin{aligned} h_{12} &= -h_{21} \\ h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} &= 1 \end{aligned}$
G 参数	$\begin{aligned} i_1 &= g_{11}\dot{U}_1 + g_{12}i_2 \\ \dot{U}_2 &= g_{21}\dot{U}_1 + g_{22}i_2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} i_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} g_{11} &= \left. \frac{i_1}{\dot{U}_1} \right _{i_2=0} & g_{12} &= \left. \frac{i_1}{i_2} \right _{\dot{U}_1=0} \\ g_{21} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right _{i_2=0} & g_{22} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{i_2} \right _{\dot{U}_1=0} \end{aligned}$	$g_{12} = -g_{21}$	$\begin{aligned} g_{12} &= -g_{21} \\ g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} &= 1 \end{aligned}$
T 参数 (或称传输参数、A 参数)	$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B(-i_2) \\ i_1 &= C\dot{U}_2 + D(-i_2) \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right _{i_2=0} & B &= \left. \frac{\dot{U}_1}{-i_2} \right _{\dot{U}_2=0} \\ C &= \left. \frac{i_1}{\dot{U}_2} \right _{i_2=0} & D &= \left. \frac{i_1}{-i_2} \right _{\dot{U}_2=0} \end{aligned}$	$AD - BC = 1$	$\begin{aligned} AD - BC &= 1 \\ A &= D \end{aligned}$

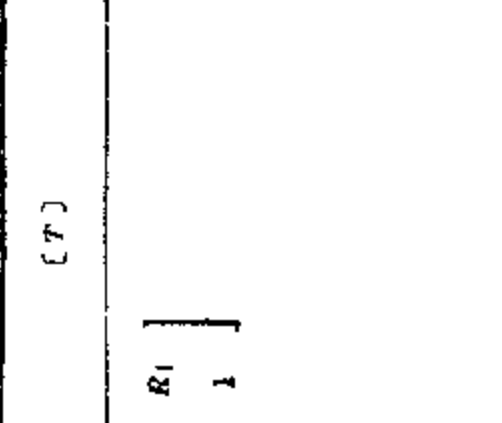
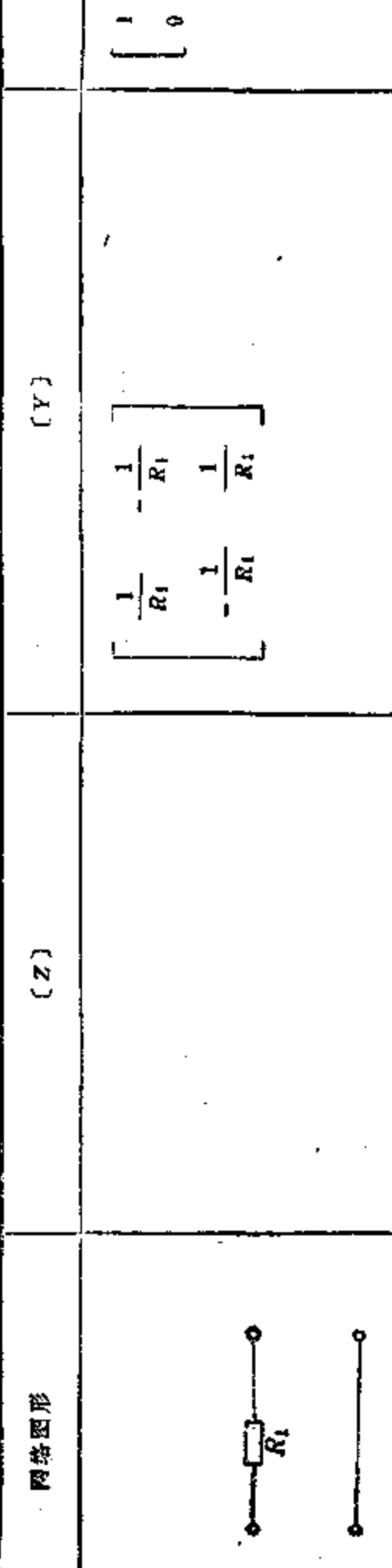
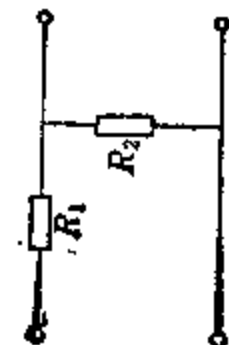
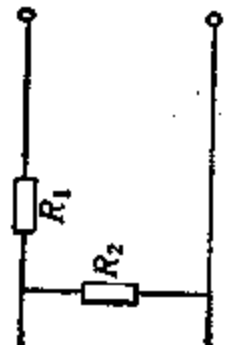
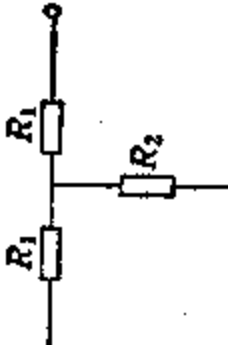
T'参数	$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= A'\dot{U}_1 + B'(-\dot{I}_1) \\ \dot{I}_2 &= C'\dot{U}_1 + D'(-\dot{I}_1) \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ -\dot{I}_1 \end{bmatrix}$	$A' = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big _{\dot{I}_1=0}$ $B' = \frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_1} \Big _{\dot{U}_1=0}$ $C' = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \Big _{\dot{I}_1=0}$ $D' = \frac{\dot{I}_2}{-\dot{I}_1} \Big _{\dot{U}_1=0}$	$A'D' - B'C' = 1$ $A' = D'$	$A'D' - B'C' = 1$	$A'D' - B'C' = 1$ $A' = D'$
网络图形	[Z]	[Y]	[T]			
		$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$			
	$\begin{bmatrix} R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$		

表2-2-17 几种常见电路的网络参数

(续)

网络图形	〔Z〕	〔Y〕	〔T〕
	$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_1 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} R_2 & R_2 \\ R_2 & R_1 + R_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ \frac{1}{R_2} & 1 + \frac{R_1}{R_2} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} & \frac{-R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \\ \frac{-R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} & \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_3} & \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \\ \frac{1}{R_3} & \frac{R_2 + R_3}{R_3} \end{bmatrix}$

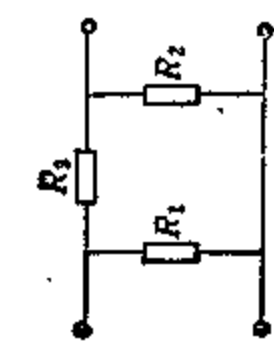
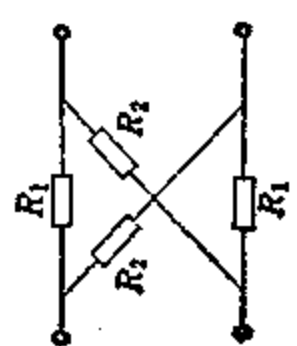
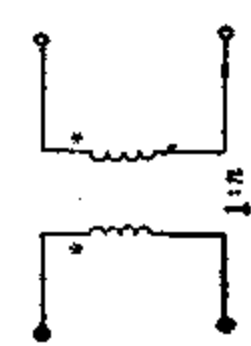
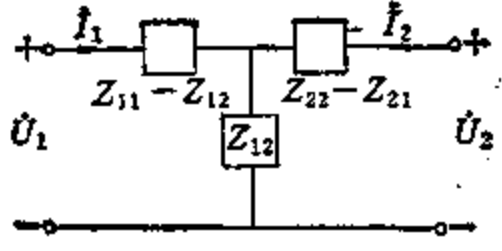
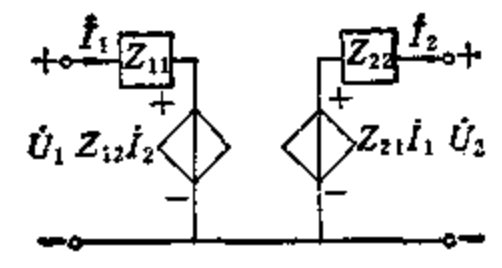
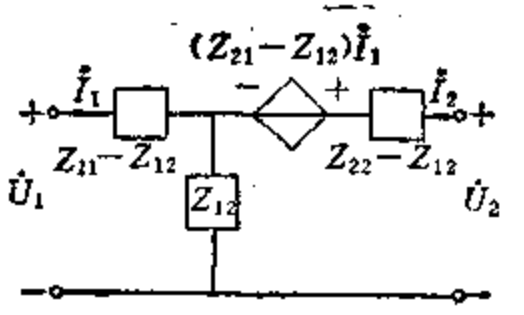
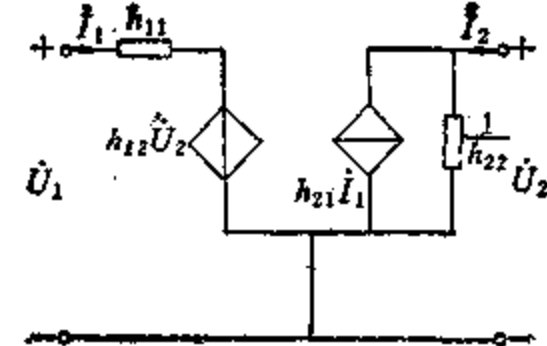
	$\begin{bmatrix} \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{R_2 + R_3}{R_2} & R_3 \\ \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_2} & \frac{R_1 + R_2}{R_1} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{R_1 + R_2}{2} & \frac{R_2 - R_1}{2} \\ \frac{R_2 - R_1}{2} & \frac{R_1 + R_2}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1} & \frac{2 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ \frac{2}{R_2 - R_1} & \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1} \end{bmatrix}$
			$\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \\ 0 & \end{bmatrix}$

表2-2-18 网络参数互换表

网络参数	Z 参数	Y 参数	H 参数	g 参数	T 参数	T' 参数
Z ₁₁ Z ₁₂ Z ₂₁ Z ₂₂	Z ₁₁ Z ₁₂ Z ₂₁ Z ₂₂	$\frac{Y_{22}}{ Y }$ $-\frac{Y_{21}}{ Y }$	$\frac{ A }{h_{22}}$ $-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$ $\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$ $\frac{1}{C}$	$\frac{D'}{C'}$ $\frac{ T' }{C'}$
Y ₁₁ Y ₁₂ Y ₂₁ Y ₂₂	$\frac{Z_{22}}{ Z }$ $-\frac{Z_{21}}{ Z }$	Y ₁₁ Y ₁₂ Y ₂₁ Y ₂₂	$\frac{1}{h_{11}}$ $\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{ g }{g_{22}}$ $-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$ $-\frac{1}{B}$	$\frac{A'}{B'}$ $-\frac{ T' }{B'}$
h ₁₁ h ₁₂ h ₂₁ h ₂₂	$\frac{ Z }{Z_{22}}$ $-\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	h ₁₁ h ₁₂ h ₂₁ h ₂₂	$\frac{g_{22}}{ g }$ $-\frac{g_{12}}{ g }$	$\frac{B}{D}$ $-\frac{1}{D}$	$\frac{B'}{A'}$ $-\frac{ T' }{A'}$
g ₁₁ g ₁₂ g ₂₁ g ₂₂	$\frac{1}{Z_{11}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{ Y }{Y_{22}}$ $-\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{ h }$ $-\frac{h_{21}}{ h }$	g ₁₁ g ₁₂ g ₂₁ g ₂₂	$\frac{C}{A}$ $\frac{1}{A}$	$\frac{C'}{D'}$ $\frac{ T' }{D'}$
A B C D	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$ $\frac{ Z }{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$ $-\frac{ Y }{Y_{21}}$	$-\frac{ h }{h_{21}}$ $-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$ $\frac{g_{11}}{g_{21}}$	A B C D	$\frac{D'}{ T' }$ $\frac{C'}{ T' }$
A' B' C' D'	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$ $\frac{1}{Z_{12}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{12}}$ $-\frac{ Y }{Y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$ $\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$-\frac{ g }{g_{12}}$ $-\frac{g_{11}}{g_{12}}$	$\frac{D}{ T }$ $\frac{C}{ T }$	$\frac{A'}{B'}$ $\frac{C'}{D'}$

注 表中: $|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ $|h| = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$ $|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ $|T| = AD - CB$ $|T'| = A'D' - C'B'$

表2-2-19 部分二端口网络参数的等效电路

二端口网络参数	二端口网络等效电路
$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2$ $\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2$ <p>当 $Z_{12} = Z_{21}$ 时</p>	
$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2$ $\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2$ <p>当 $Z_{12} \neq Z_{21}$ 时</p>	
$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2$ $\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2$ <p>当 $Z_{12} \neq Z_{21}$ 时</p>	
$\dot{U}_1 = h_{11}\dot{I}_1 + h_{12}\dot{U}_2$ $\dot{I}_2 = h_{21}\dot{I}_1 + h_{22}\dot{U}_2$	

6.3 二端口网络的连接和参数

在二端口网络分析中，可以将比较复杂的网络看作由某些简单的一、二端口网络按一定方式组合构成，因此在分析中可以分别求出各简单的一、二端口网络的参数，进而根据其连接关系求出网络的参数。二端口网络的三种基本连接方式为串联、并联及级联，见图2-2-36。

二端口网络在串联，并联中应注意不能破坏原二端口网络端口条件。设二端口网络的基本参数为：

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

则复合二端口网络参数与部分二端口网络参数之间的关系见表2-2-20。

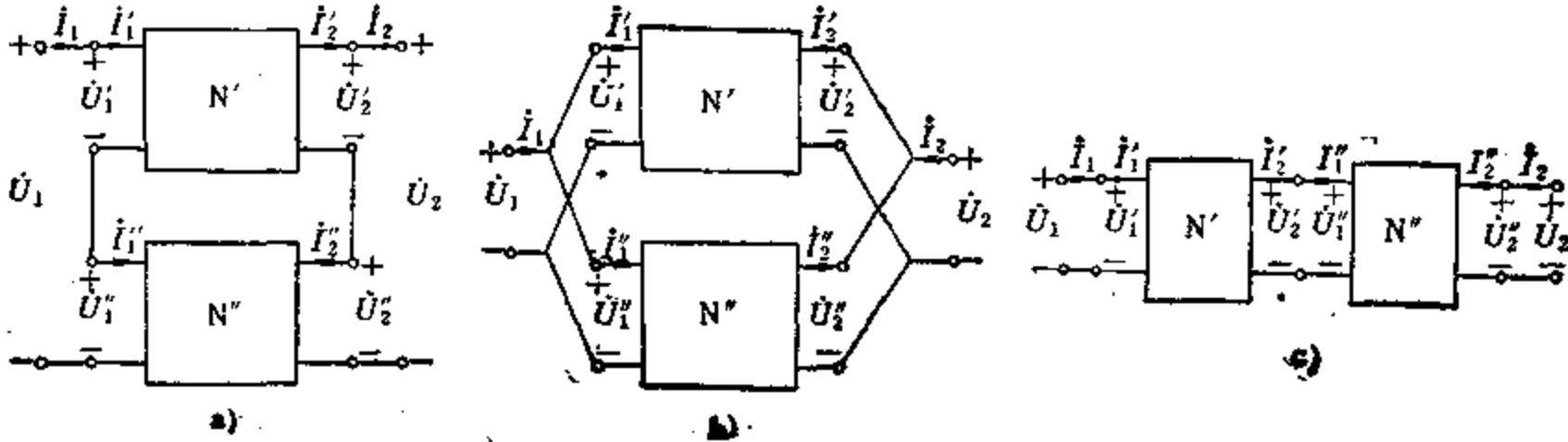


图2-2-36 二端口网络的连接

a) 二端口网络串联 b) 二端口网络并联 c) 二端口网络级联

表2-2-20 二端口网络的连接

连接方式	N_1 网络参数	N_2 网络参数	N 网络参数
	$\begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z''_{11} & Z''_{12} \\ Z''_{21} & Z''_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z'_{11} + Z''_{11} & Z'_{12} + Z''_{12} \\ Z'_{21} + Z''_{21} & Z'_{22} + Z''_{22} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} \\ Y''_{21} & Y''_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y'_{11} + Y''_{11} & Y'_{12} + Y''_{12} \\ Y'_{21} + Y''_{21} & Y'_{22} + Y''_{22} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A'A'' + B'C'' & A'B'' + B'D'' \\ C'A'' + D'C'' & C'B'' + D'D'' \end{bmatrix}$

6.4 网络函数

在零状态下，网络响应的拉氏变换与网络激励的拉氏变换之比，称为网络函数，用 $H(s)$ 表示。当网络的激励与响应在同一端口时，称为策动点函数；当网络的激励与响应在不同端口时，称为转移函数，因此网络函数可分为如表2-2-21所示的几种情况。

网络函数 $H(s)$ 与冲激响应 $h(t)$ 是一对拉普拉斯变换。只要知道 $H(s)$ 在 s 平面中的零点、极点的分布情况，就可以判断时域中的 $h(t)$ 波形的特性。在 s 平面中用“0”表示零点，用“×”表示极点。表2-2-22列出了部分简单网络的网络函数的零点、极点分布及对应的原函数波形。

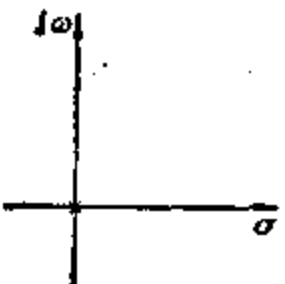
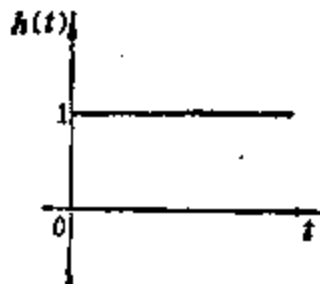
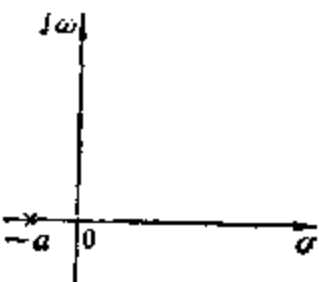
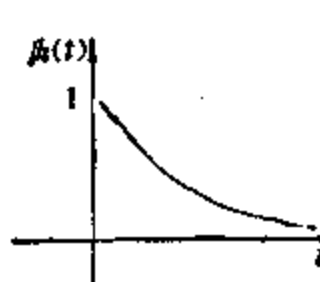
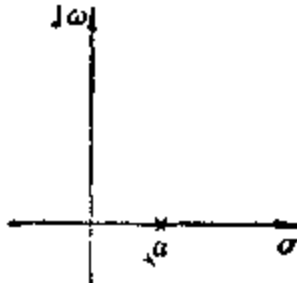
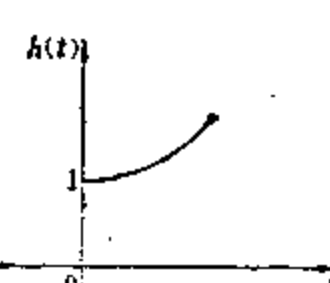
网络稳定性要求 $H(s)$ 零点、极点分布必须满足以下条件：

- (1) $H(s)$ 在右半平面内不能有极点；

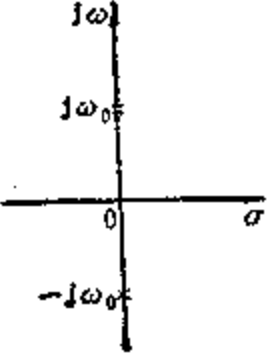
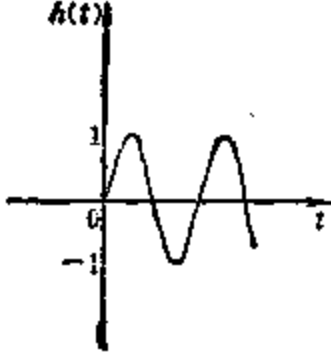
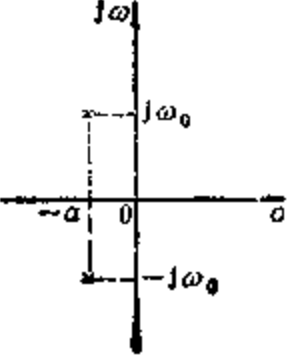
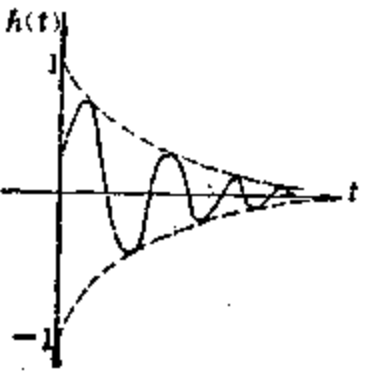
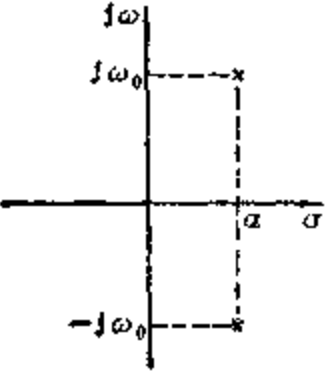
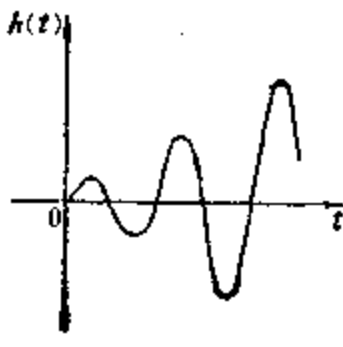
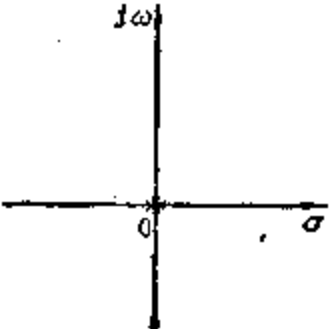
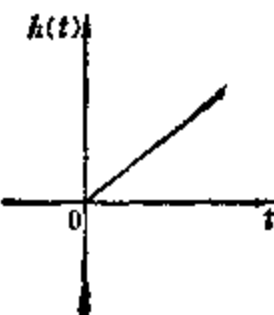
表2-2-21 网络函数

	激励 (入口)	响应 (出口)	策动点函数	转移函数
一端口网络	电压	电流	导纳函数	
	电流	电压	阻抗函数	
二端口网络	电压	电压		转移电压比 (电压传输函数)
	电流	电流		转移电流比 (电流传输函数)
	电压	电流		转移导纳
	电流	电压		转移阻抗

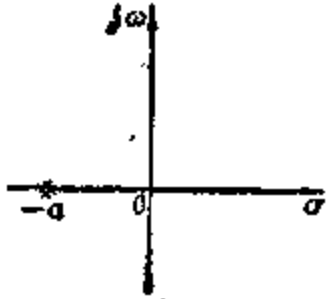
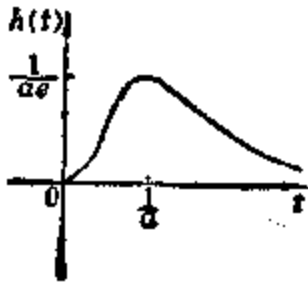
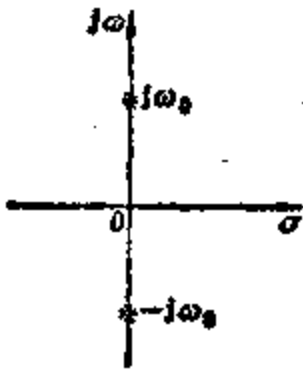
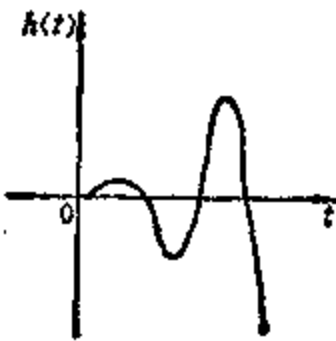
表2-2-22 网络函数

$H(s)$	s 平面上的零极点	冲激响应波形	冲激响应 $h(t)$ ($t \geq 0$)
$\frac{1}{s}$			$1U(t)$
$\frac{1}{s+a}$			$1e^{-at}$
$\frac{1}{s-a}$			$1e^{at}$

(续)

$H(s)$	s 平面上零点极点	冲激响应波形	冲激响应 $t \geq 0$
$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$			$1 \sin \omega_0 t$
$\frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$			$1 e^{-at} \sin \omega_0 t$
$\frac{\omega_0}{(s - a)^2 + \omega_0^2}$			$1 e^{at} \sin \omega_0 t$
$\frac{1}{s^2}$			$1 t$

(续)

$H(s)$	s 平面上零点极点	冲激响应波形	
$\frac{1}{(s+a)^2}$			te^{-at}
$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$			$t \sin \omega_0 t$

(2) $H(s)$ 在 $j\omega$ 轴上的极点必须是单阶的。

例 如图2·2-37所示电路，其电压传输函数

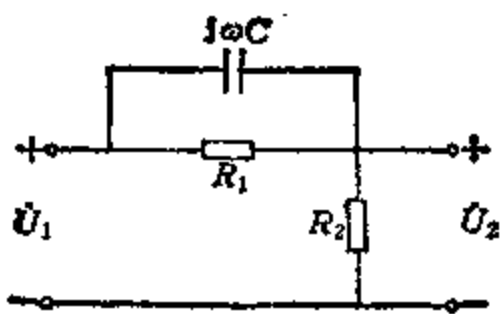


图2·2-37 网络函数例图

$$H(s) = \frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$$

极点位于 $p = -\frac{(R_1 + R_2)}{(R_1 R_2 C)}$ ，在 s 平面左半平面，网络稳定。

$H(s)$ 的一般式为：

$H(s)$ 的一般式为：

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$= K \frac{(s - Z_1)(s - Z_2) \dots}{(s - P_2)(s - P_4) \dots}$$

式中 Z_1, Z_2, \dots 为零点； P_2, P_4, \dots 为极点； K 为常数，由网络决定。

第3章 信号与系统分析

1 信号与系统

1.1 信号

1.1.1 信号的定义

广义地说，一切运动或者状态的变化都是一种信号。通常把语言、文字、图象或数据等统称为蕴涵着信息的信号，而信息是指从客观世界获得的新知识或者对客观事物发出的新要求。可以说，信号是信息的表现形式，而信息是信号的具体内容。通常，信号的表现形式是某种物理量，如声信号、光信号、电信号等。所谓电信号，通常是指随时间变化的电压或电流，也可以是电荷、磁通以及电磁波等。习惯上常把电信号简称为信号。

描述信号的基本方法是写出它的数学表达式，该表达式一般是时间（或空间）的函数，该函数的图象称为信号的波形。在讨论与信号有关的问题时，“信号”与“函数”两个词具有相同的含义。

1.1.2 信号的传输与处理

为了利用信号传递信息，通常需要在发送端将欲传递的信息转变成某种信号，经过传输以后，在接收端再将信号还原成信息，这就是信号传输。所谓信号处理，即是对信号进行某种加工或变换，以便削弱信号中的多余成分，或者将信号变换成为容易分析和识别的形式。

1.1.3 信号分类

信号的分类方法很多，常见的有以下几种分类方法：

1) 连续时间信号与离散时间信号 在连续时间范围内有定义的信号称为连续时间信号，简称为连续信号。这里“连续”是指函数的定义域——时间，是连续的，至于信号的值域可以是连续的，也可以是离散的。仅在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号，简称离散信号。这里“离散”是指函数的定义域——时间，是离散的，它只取某些规定的值。

2) 周期信号与非周期信号 周期信号是定义在 $(-\infty, \infty)$ 区间，每隔一定时间 T （或整数 K ），按相同规律重复变化的信号。它的数学表示式

可写为：

对于连续信号 $f(t) = f(t + mT)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

对于离散信号 $f(k) = f(k + mK)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

满足以上关系式的最小 T （或 K ）值，称为该信号的重复周期，简称周期。不具有周期性的信号称为非周期信号。

3) 实信号与复信号 物理可实现的信号都是时间的实函数，其各时刻的函数值均为实数，称这类信号为实信号。虽然实际上不能产生复信号，但理论分析中常常用到复信号。在连续信号中最常用的是复指数信号。复指数信号可表示为：

$$f(t) = e^{st}, \quad -\infty < t < \infty$$

式中 复数 $S = \sigma + j\omega$ ， σ 是 S 的实部，常记作 $\text{Re}[s]$ ； ω 是 s 的虚部，常记作 $\text{Im}[s]$ 。复指数信号的重要特征之一是，它对时间的微分和积分仍然是复指数信号。

4) 能量信号与功率信号 若信号 $f(t)$ 的能量 E 满足： $0 < E < \infty$ ，则称其为能量有限信号，简称能量信号；若信号 $f(t)$ 的功率 P 满足： $0 < P < \infty$ ，则称其为功率有限信号，简称功率信号。

5) 确知信号与随机信号 确知信号可以表示为一个确定的时间函数（或序列），当给定某一时间值时，函数有确定的数值。随机信号的变化规律不能用确切的时间函数表征，其波形具有不确定性，只可能根据统计规律知道它取某一数值的概率。随机信号还可分为连续随机信号与离散随机信号。这两类信号的波形可以通过测量仪器记录下来，但波形在每个时刻的取值无法预测。

1.1.4 基本连续时间信号

这些信号是构成其他很多信号的基本单元。

(1) 复指数信号 $f(t) = C \cdot e^{at}$

式中 C 和 a 一般为复数。

(2) 正弦信号 $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

式中 A 为振幅； ω 为角频率； ϕ 是初相位。

(3) 单位阶跃信号 该信号用 $U(t)$ 标记，

其定义为:

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

单位阶跃信号在 $t = 0$ 处具有间断点, 在间断点上 $U(t)$ 的值可定义为 $\frac{1}{2}$ 。利用单位阶跃信号 $U(t)$, 容易表示脉冲信号的存在时间。

(4) 单位冲激信号 狄拉克 (Dirac) 给出了单位冲激信号的定义:

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) &= 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned} \right\}$$

该积分的含义是函数波形下的面积为 1。

单位冲激函数 $\delta(t)$ 表示在 $t = 0$ 处的冲激, 在 $t = t_1$ 处出现的冲激表示为: $\delta(t - t_1)$ 。

冲激函数的主要性质如下:

1) 抽样性质 (筛选性质) 若 $f(t)$ 为在 $t = 0$ 处连续的时间函数, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

2) 标度变换 $\delta(at) = (1/|a|) \delta(t)$, 式中 a 为实常数。

3) 与连续函数之积

$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$$

4) 与阶跃函数的关系

$$\delta(t) = dU(t)/dt \text{ 或 } \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = U(t)$$

5) δ 函数的各阶导数的性质 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times \delta^{(n)}(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$, 式中 $\delta^{(n)}(t)$ 为 $\delta(t)$ 的 n 阶导数。令 $n = 1$, 得 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times \delta'(t) dt = -f'(0)$, $\delta'(t)$ 也常称其为冲激偶。

6) δ 函数 是偶函数, 即 $\delta(t) = \delta(-t)$ 。

(5) 抽样函数 该信号用 $S_a(t)$ 标记, $S_a(t) = (\sin t)/t$, 其波形如图 2-3-1 所示。

1.1.5 信号的分解

在信号与系统分析中, 为了使问题简化, 可以把复杂信号分解成若干简单信号的线性迭加。信号

分解的方法主要有以下几种:

(1) 直流分量 $f_d(t)$ 与交流分量 $f_a(t)$ 的叠加 若 $f(t)$ 是功率信号, 则 $f(t) = f_d(t) + f_a(t)$ 。

(2) 偶分量与奇分量的迭加 任何信号都能表示为: $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$

式中 $f_e(t) = [f(t) + f(-t)]/2$, 为 $f(t)$ 的偶分量;

$f_o(t) = [f(t) - f(-t)]/2$, 为 $f(t)$ 的奇分量。

(3) 冲激分量的叠加 任意有始信号 $f(t)$ 都可表示为: $f(t) = \int_{0^-}^{t^+} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

(4) 阶跃分量的叠加 利用单位阶跃信号的延时性质, 任意有始信号 $f(t)$ 都可表示为:

$$f(t) = f(0^+) U(t) + \int_{0^+}^t f'(\tau) \cdot U(t - \tau) d\tau$$

式中 $f'(\tau) = df(\tau)/d\tau$

(5) 正交函数的叠加 任意信号 (或函数) $f(t)$, 一定能够用完备正交函数集表示出来, 这种方法就是函数的广义傅里叶级数展开。常用的完备正交函数集有: 三角函数集; 复指数函数集 $\{e^{jn\Omega t}\}$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 在区间 $(t_0, t_0 + T)$, ($T = 2\pi/\Omega$) 内; 沃尔什 (Walsh) 函数集等。

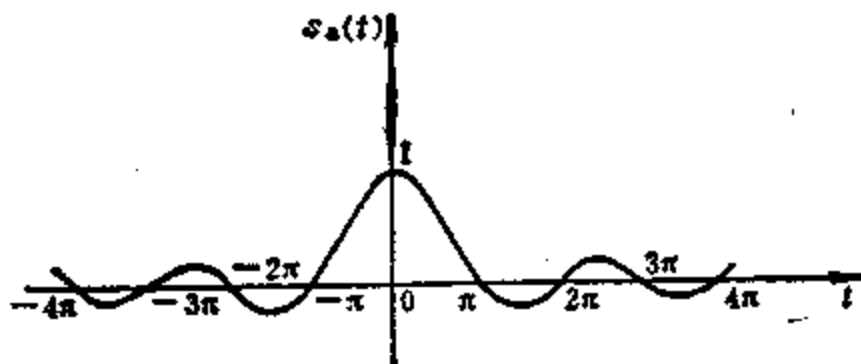


图 2-3-1 抽样函数的波形

1.2 系统

1.2.1 系统的定义

系统是指由若干相互作用和相互依赖的事物组成的具有特定功能的整体。

1.2.2 系统的分类

按照其数学模型的差异可作如下分类:

(1) 线性系统与非线性系统 一个既具有分解特性, 又具有零状态线性和零输入线性的系统称

为线性系统。一个系统，如果不是线性的，则称为非线性系统。

(2) 时变系统与非时变系统 如果系统的内部结构参数不随时间而变化，则称之为非时变（或称时不变、定常）系统。这类系统具有激励与响应之间的平移不变性（或时不变性、时延特性）。相反，若系统的参数（那怕只有一个参数）是随时间变化的，就称为时变系统。

(3) 即时系统与动态系统 如果系统在任意时刻的响应仅决定于该时刻的激励，与它过去的工作状态无关，则称之为即时系统（或无记忆系统）。若系统在任意时刻的响应不仅与该时刻的激励有关，而且与它过去的工作状态有关，则称之为动态系统（或有记忆系统）。含有记忆元件（如电感、电容等）的系统是动态系统。

(4) 连续时间系统与离散时间系统 当输入给系统以连续时间信号时，若输出也是连续时间信号，则该系统是连续时间系统，简称连续系统。当输入给系统以离散时间信号时，若其输出也是离散时间信号，则称该系统为离散时间系统，简称离散系统。

(5) 因果系统与非因果系统 如果一个系统的任何时刻的输出只决定于现在的输入以及过去的输入，而不决定于未来的输入，该系统就称为因果系统（或非预测的系统），否则称为非因果系统。借用“因果”一词，常把 $t = 0$ 接入系统的信号（即 $t < 0$ 时为零的信号）称为因果信号或有始信号。

1.2.3 信号与系统的关系

在系统理论中，信号与系统是不可分割的。它们的相互结合才能完成传递（或处理）信息的功能。信号分析与系统分析是相辅相成、互为依存的，两者的特性应当相匹配（例如时间特性、频率特性、功率能量特性等方面），只有这样才能称为真正具有实用性的物理系统。因而电子工程师在研制电子系统（或设备）时，必须对电子系统所处理的各种信号进行分析与研究。

2 连续系统的时域分析

2.1 系统响应的分解特性

线性时不变系统的完全响应是由初始状态和输入信号共同作用引起的。若将全响应用 $y(t)$ 表示，则

$$y(t) = \text{零输入响应 } y_x(t) + \text{零状态响应}$$

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \text{自由响应 } y_a(t) + \text{强迫响应 } y_f(t) \\ &= \text{瞬态响应 } y_t(t) + \text{稳态响应 } y_s(t) \end{aligned}$$

以上三种分解方式其物理含义有明显的区别。在信号与系统分析中，求取系统响应时常用第一种分解方法。因为线性系统满足零输入线性，也满足零状态线性，所以可以分别求取零输入响应和零状态响应。零输入响应的求取比较容易，故只着重研究零状态响应的求法。

2.2 冲激响应与阶跃响应

1) 冲激响应 系统对于单位冲激信号 $\delta(t)$ 的零状态响应称为冲激响应，用 $h(t)$ 表示。

2) 阶跃响应 系统对于单位阶跃信号 $U(t)$ 的零状态响应称为阶跃响应，用 $S(t)$ 表示。

3) 冲激响应与阶跃响应的关系 线性时不变系统的冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $S(t)$ 只决定于系统本身的结构，与外界因素无关。因而 $h(t)$ [或 $S(t)$] 是表征系统结构特点的方法之一。冲激响应与阶跃响应的关系为：

$$h(t) = \frac{d}{dt} S(t), \quad S(t) = \int_{0-}^t h(\tau) d\tau$$

对于因果系统，它们一定满足以下条件：

$$h(t) = 0, \quad \text{且 } S(t) = 0, \quad (t < 0-)$$

2.3 卷积积分

卷积积分是线性时不变系统时域分析的重要数学工具，应用它不仅便于用计算机求解系统的零状态响应，而且可以通过卷积定理揭示出系统时域分析方法与傅里叶变换或拉普拉斯变换分析法的内在联系。

(1) 卷积积分的定义 已知函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ ($-\infty < t < \infty$)，则它们的卷积积分为：

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \\ &(-\infty < t < \infty) \end{aligned} \quad (2.3-1)$$

若 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 都是因果信号，则

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{0-}^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \\ &(-\infty < t < \infty) \end{aligned} \quad (2.3-2)$$

(2) 卷积积分的运算规则

1) 交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

2) 分配律

$$f_1(t) * (f_2(t) + f_3(t)) \\ = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

3) 结合律

$$f_1(t) * f_2(t) * f_3(t) \\ = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \\ = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$$

4) 平移性

设 $f_1(t) * f_2(t) = f(t)$, 则有:

$$f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) \\ = f[t - (t_1 + t_2)]$$

5) 与冲激函数的卷积

$$f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = f(t)$$

6) 卷积的微分

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

则其导数 $f'(t) = f_1(t) * f_2'(t) = f_1'(t) * f_2(t)$

式中 $f'(t) = df(t)/dt$; $f_1'(t) = df_1(t)/dt$; $f_2'(t) = df_2(t)/dt$

7) 卷积的积分

$$\text{若 } f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx, f(t) = f_1(t)$$

$* f_2(t)$ 且 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是一致绝对收敛的函数, 则

$$f^{(-1)}(t) = f_1(t) * f_2^{(-1)}(t) \\ = f_1^{(-1)}(t) * f_2(t)$$

将卷积的微分、积分运算规则进行推广可得卷积的高阶导数和多重积分运算规则

$$f^{(i)}(t) = f_1^{(i)}(t) * f_2^{(j)}(t)$$

式中 当 i 或 j 取正整数时表示导数的阶数, 取负

整数时为重积分的次数。

2.4 系统的零状态响应

在线性时不变系统中, 若系统的冲激响应为 $h(t)$, 输入信号为 $f(t)$, 则该系统对 $f(t)$ 的零状态响应

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

若系统为因果性的, 且 $t < 0$ 时, $f(t) =$

$$0, \text{ 则 } y(t) = \int_{0^-}^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{0^-}^t h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

上面的卷积积分可以利用数值计算方法借助计算机进行数值计算。

2.5 杜阿密尔积分

杜阿密尔 (Duhamel) 积分也称叠加积分, 它实质上是卷积积分的一种表达形式。若系统的阶跃响应为 $S(t)$, 当输入为 $f(t)$ 时, 则系统对 $f(t)$ 的零状态响应

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau) S(t - \tau) d\tau$$

若输入和阶跃响应均为因果函数, 则系统的零状态响应

$$y(t) = \int_{0^-}^t f'(\tau) S(t - \tau) d\tau$$

2.6 卷积表

常用函数的卷积积分表见表2.3-1。

表2.3-1 常用函数的卷积积分表

序号	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$
1	$f(t)$	$\delta(t)$	$f(t)$
2	$f(t)$	$\delta'(t)$	$f'(t)$
3	$f(t)$	$U(t)$	$\int_{-\infty}^t f(x) dx$
4	$U(t)$	$U(t)$	$tU(t)$
5	$t \cdot U(t)$	$U(t)$	$\frac{1}{2} t^2 U(t)$

(续)

序号	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$
6	$t^m U(t)$	$t^n U(t)$	$\frac{m! n!}{(m+n+1)!} \cdot (m+n+1) U(t)$
7	$e^{-at} U(t)$	$U(t)$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at}) U(t)$
8	$e^{-at} U(t)$	$e^{-at} U(t)$	$t \cdot e^{-at} U(t)$
9	$e^{-a_1 t} U(t)$	$e^{-a_2 t} U(t)$	$\frac{1}{a_2 - a_1} (e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t}) U(t), a_1 \neq a_2$
10	$t U(t)$	$e^{-at} U(t)$	$\left(\frac{at-1}{a^2} + \frac{1}{a^2} e^{-at} \right) U(t)$
11	$t e^{-a_1 t} U(t)$	$t e^{-a_2 t} U(t)$	$\frac{1}{2} t^2 e^{-at} U(t)$
12	$t e^{-a_1 t} U(t)$	$t e^{-a_2 t} U(t)$	$\left[\frac{(a_2 - a_1)t - 1}{(a_2 - a_1)^2} e^{-a_1 t} + \frac{1}{(a_2 - a_1)^2} e^{-a_2 t} \right] U(t), a_1 \neq a_2$
13	$e^{-a_1 t} \cos(\beta t + \theta) \cdot U(t)$	$e^{-a_2 t} \cdot U(t)$	$\left[\frac{e^{-a_1 t} \cdot \cos(\beta t + \theta + \varphi)}{\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + \beta^2}} - \frac{e^{-a_2 t} \cdot \cos(\theta - \varphi)}{\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + \beta^2}} \right] \cdot U(t)$ $\varphi = \arctg \frac{\beta}{a_2 - a_1}$

3 连续系统的傅里叶分析

应用傅里叶 (J. B. J. Fourier) 变换分析信号特性和系统特性的方法, 习惯上称之为傅里叶分析或频域分析。它是以前信号的频率特性为基础, 将时域信号变换为频域信号的分析方法。信号与系统的频域表示法的优点是物理概念十分清楚, 例如信号带宽、通频带、频率响应等。

3.1 周期信号的傅里叶级数

3.1.1 傅里叶级数

若周期信号满足狄里赫利 (Dirichlet) 条件, 其周期为 T , 则在其任一周期内可表示成傅里叶级数, 即

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (2.3-3)$$

式中 ω 为基波角频率, $\omega = 2\pi/T$; $a_0/2$ 为 $f(t)$ 的直流分量; a_n 、 b_n 称为傅里叶系数, 由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} a_0/2 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (2.3-4)$$

由式(2.3-4)可见, a_n 和 b_n 都是 n (或 $n\omega$) 的函数, 其中 a_n 是 n 的偶函数, 而 b_n 是 n 的奇函数。

式(2.3-3)还可写成如下形式:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad (2.3-5)$$

式中 A_0 为直流分量, $A_0 = a_0/2$; A_n 为第 n 次谐波的振幅, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; φ_n 为第 n 次谐波的初相位, $\varphi_n = \arctg(b_n/a_n)$ 。

上式表明, 周期信号可以看作是各次谐波之和。

3.1.2 傅里叶系数和波形对称性

周期信号展开成傅里叶级数的主要工作是计算傅里叶系数。若信号 $f(t)$ 的波形存在某些对称性, 则系数的计算大为简化, 见表2.3-2。

3.1.3 傅里级数的指数形式

三角形式的傅里叶级数物理含义明确。利用欧拉公式也可将其表示成结构更紧凑、便于数学处理的傅里叶级数的指数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{F}_n e^{jn\omega t} \quad (2.3-6)$$

$$\dot{F}_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega t} dt \quad (2.3-7)$$

式中 \dot{F}_n 称为指数傅里叶系数 (简称复系数)

式(2.3-6)表明, 任意周期信号 $f(t)$ 可分解为不同频率的虚指数信号 ($e^{jn\omega t}$) 之和, 其各分量的复数幅度为 \dot{F}_n 。一对同值的正负指数信号 $e^{jn\omega t}$ 和 $e^{-jn\omega t}$ 组成频率为 $n\omega$ 的正弦分量, 故 $2\dot{F}_n = a_n - jb_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} e^{-j\varphi_n} = A_n (\varphi_n = \arctg(b_n/a_n))$ 代表第 n 次谐波的复振幅。

3.1.4 周期信号的频谱

周期信号的傅里叶级数表示式中各次谐波的振幅和相位随频率 ($n\omega$) 变化的关系, 称为信号的频谱, 前者称为振幅频谱, 后者称相位频谱。把频谱用曲线作图表示, 则称为频谱图。

周期信号频谱的主要特点:

(1) 谱线具有离散性 (间隔为基频 ω)、谐波性 (谱线只存在于 $n\omega$ 的谐频位置上) 和收敛性 (幅值随频率增加而减小);

(2) 信号持续时间愈短 (脉宽 τ 愈窄), 则信号占有的频带愈宽, 且各次谐波振幅值随脉宽减小而减小;

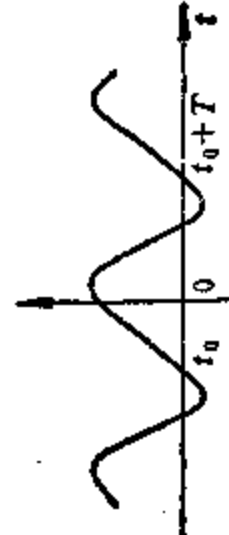
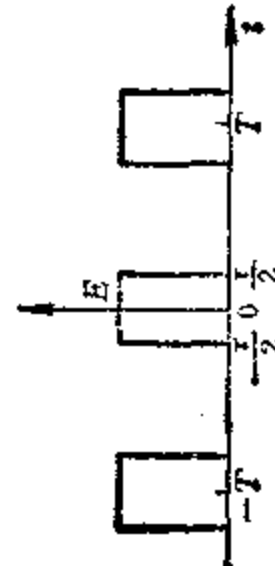
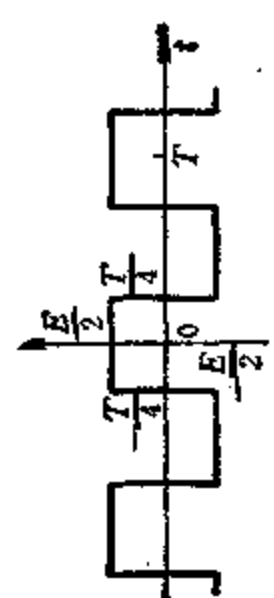
(3) 信号周期愈大, $\omega = 2\pi/T$ 愈小, 谱线愈密, 且各次谐波振幅值愈小。

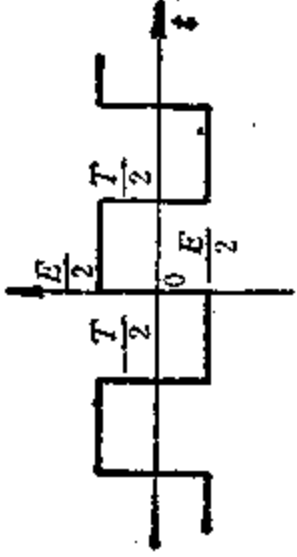
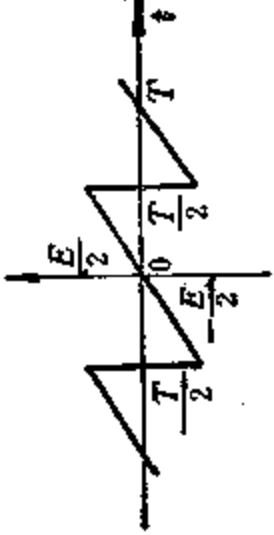
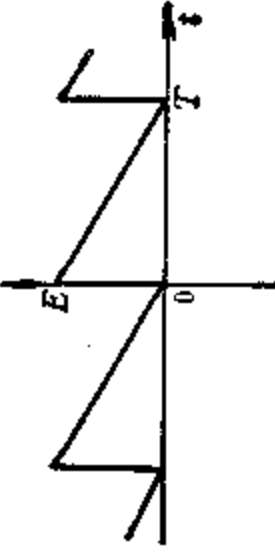
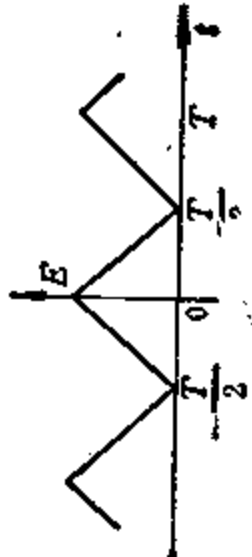
3.1.5 常用周期信号的傅里叶级数 (见表2.3-3)

表2.3-2 周期函数的对称条件和傅里叶系数

函数	对称条件	a_n	b_n	傅氏级数性质
偶函数	$f(t) = f(-t)$ 纵轴对称	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt$	0	只有余弦项
奇函数	$f(t) = -f(-t)$ 原点对称	0	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt$	只有正弦项
奇谐函数	$f(t) = -f(t \pm \frac{T}{2})$ 半波镜像对称	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt$	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt$	n 为奇数
偶谐函数	$f(t) = f(t \pm \frac{T}{2})$ 半周期重迭	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt$	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt$	n 为偶数

表2-3-3 常用周期信号的傅里叶级数

周期信号 $f(t)$		傅里叶级数 $f(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$				
信号名称	波形	对称性	$a_0/2$	a_n	b_n	包含的频率分量
一般周期信号			$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$	$\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos n\omega t dt$	$\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin n\omega t dt$	全部
周期矩形信号		偶函数	$\frac{ET}{T}$	$\frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi T}{T}\right)$ $= \frac{ET}{\pi} S_n\left(\frac{n\pi T}{2}\right)$	0	直流和余弦分量
周期对称方波信号		偶函数, 奇谐函数	0	$\frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	0	奇次余弦分量

		奇函数, 奇谐波函数	0	0	$\frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	奇次正弦分量
周期锯齿信号		奇函数	0	0	$(-1)^{n+1} \frac{E}{n\pi}$	正弦分量
		去直流后为奇函数	$\frac{E}{2}$	0	$\frac{E}{n\pi}$	直流和正弦分量
周期三角信号		偶函数, 去直流后为奇谐波函数	$\frac{E}{2}$	$\frac{4E}{(n\pi)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	0	直流和奇次余弦分量

(续)

周期信号 $f(t)$		傅里叶级数 $f(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$				
信号名称	波形	对称性	$a_0/2$	a_n	b_n	包含的频率分量
周期三角信号		奇函数, 奇谐函数	0	0	$\frac{4E}{(n\pi)^2} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	奇次正弦分量
周期半波余弦信号		偶函数	$\frac{E}{\pi}$	$\frac{2E}{(1-n^2)\pi} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	0	直流和偶次余弦分量
周期全波余弦信号		偶函数	$\frac{2E}{\pi}$	$(-1)^{n+1} \cdot \frac{4E}{(4n^2-1)\pi}$	0	直流和各次余弦分量

3.2 傅里叶变换及变换表

3.2.1 傅里叶变换

若信号 $f(t)$ 满足绝对可积条件, 则必然存在傅里叶变换对:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= F(j\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (2.3-8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] &= f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.3-9)$$

式 (2.3-8) 称为傅里叶正变换, $F(j\omega)$ 称为 $f(t)$ 的频谱函数。式 (2.3-9) 称为傅里叶逆变

换, $f(t)$ 称为 $F(j\omega)$ 的原函数。

频谱函数 $F(j\omega)$ 一般是复函数, 可写作:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

式中 $|F(j\omega)|$ 代表信号中各频率分量的相对大小, $\varphi(\omega)$ 代表各频率分量间的相位关系。习惯上把 $|F(j\omega)|$ 与 ω 和 $\varphi(\omega)$ 与 ω 的关系曲线分别称为振幅频谱和相位频谱。

引入冲激函数的概念后, 使某些不满足绝对可积条件的函数也存在傅里叶变换, 如 $U(t)$ 、 $t \cdot U(t)$ 、 $\sin\omega_0 t$ 、 $\sin\omega_0 t U(t)$ 等, 这类信号常称为奇异信号或功率信号。

3.2.2 傅里叶变换的主要性质

若 $f(t)$ 的频谱函数记作 $F(j\omega)$, 则傅里叶变换存在表 2.3-4 所示的性质。这些性质揭示了信号的时域描述与频域描述间的对应关系。

表 2.3-4 傅里叶变换的性质

性 质	$f(t)$	$F(j\omega)$
线性特性	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$
尺度变换	$f(at) \quad a \neq 0$	$\frac{1}{ a } F(j\omega/a)$
反 折	$f(-t)$	$F(-j\omega)$
对 称 性	$F(jt)$	$2\pi f(-\omega)$
时移特性	$f(t \pm t_0)$	$F(j\omega) e^{\pm j\omega t_0}$
	$f(at - b) \quad a \neq 0$	$\frac{1}{ a } e^{-j\omega \cdot a} F(j\omega/a)$
频移特性	$f(t) e^{\pm j\omega_0 t}$	$F[j(\omega \pm \omega_0)]$
时域微分	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(j\omega)^n F(j\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\pi F(0) \delta(\omega) + F(j\omega)/j\omega$
频域微分	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n}{d\omega^n} F(j\omega)$
时域卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$
频域卷积定理	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$

3·2·3 常用奇异信号和功率信号的傅里叶变换(见表2·3-5)

3·2·4 常用信号的频谱函数及其频谱图(见表2·3-6)

表2·3-5 奇异信号和功率信号的傅氏变换

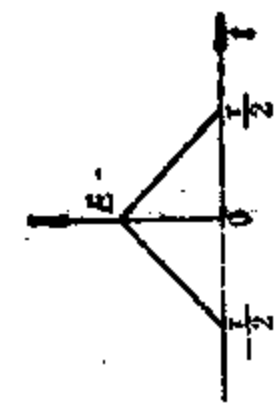
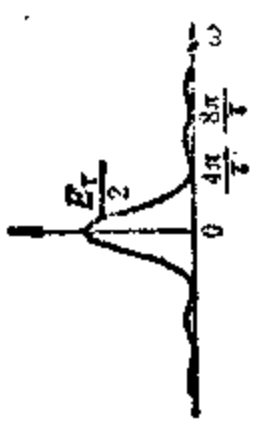
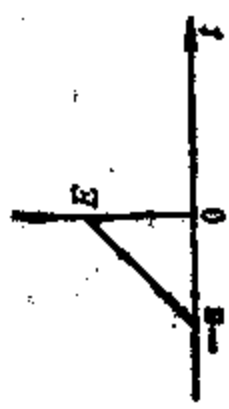
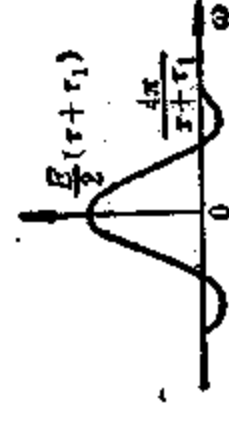
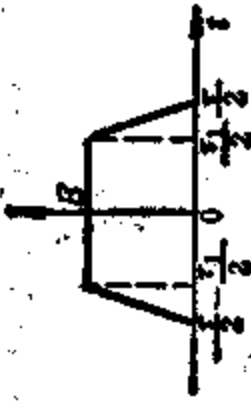
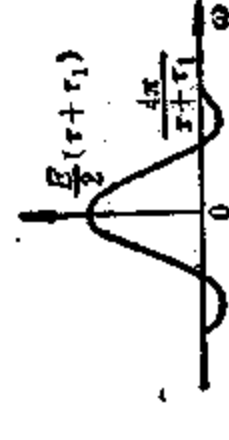
序号	时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(j\omega)$
1	$\delta(t)$	1
2	1	$2\pi\delta(\omega)$
3	$U(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
4	$Sgn(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
5	$\delta'(t)$	$j\omega$
6	$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
7	t	$j2\pi\delta'(\omega)$
8	t^n	$2\pi(j)^n\delta^{(n)}(\omega)$
9	$t \cdot U(t)$	$j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$
10	$1/t$	$-j\pi Sgn(\omega)$
11	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
12	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
13	$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
14	$\cos\omega_0 t U(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
15	$\sin\omega_0 t U(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
16	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\Omega\delta_\Omega(\omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega), \Omega = \frac{2\pi}{T}$
17	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega), \Omega = \frac{2\pi}{T}$

表2-3-6 常用信号的傅里叶变换表

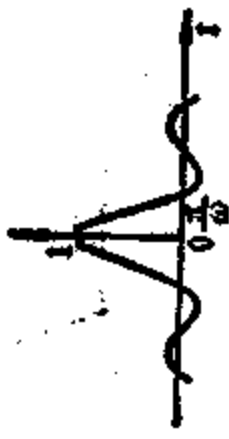
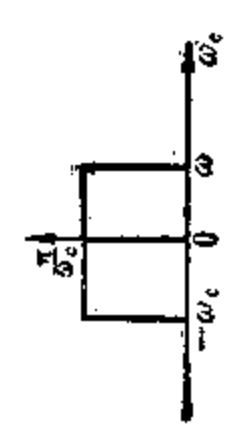

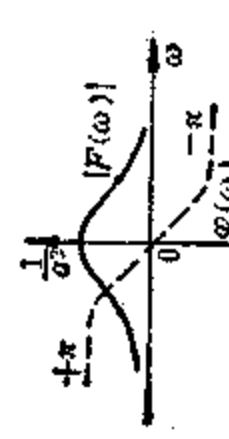


序号	信号名称	时间函数 $f(t)$	波形图	频谱函数 $F(\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	频谱图
1	单边指数脉冲	$E e^{-at} U(t)$ $(a > 0)$		$\frac{E}{a + j\omega}$	
2	双边指数脉冲	$E e^{-a t }$ $(a > 0)$		$\frac{2aE}{a^2 + \omega^2}$	
3	矩形脉冲	$\begin{cases} E & (t < \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (t \geq \frac{\tau}{2}) \end{cases}$		$E \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) = \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$	


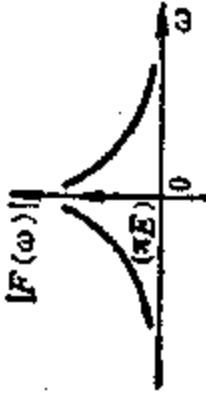
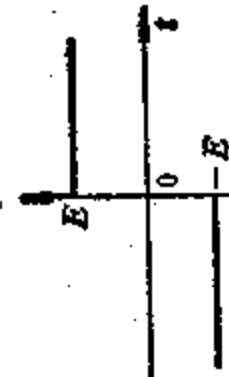
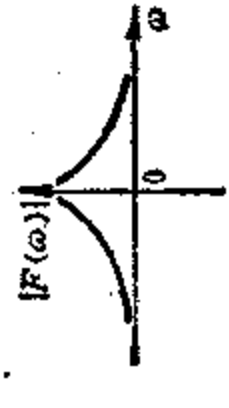


(续)

序号	信号名称	时间函数 $f(t)$	波形图	频谱函数 $F(\omega) = P(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	频谱图
4	钟形脉冲	$E_0 \left(\frac{t}{\tau} \right)^2$		$\pi E_0 \tau^3 \left(-\frac{\omega \tau}{2} \right)^3$	
5	余弦脉冲	$\begin{cases} E \cos \frac{\pi t}{\tau} & (t < \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (t \geq \frac{\tau}{2}) \end{cases}$		$\frac{2E\tau}{\pi} \cos \frac{\omega\tau}{2} \left[1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi} \right)^2 \right]$	
6	升余弦脉冲	$\begin{cases} \frac{E}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right) & (t < \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (t \geq \frac{\tau}{2}) \end{cases}$		$\frac{E\tau}{2} \frac{\text{Sa} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2\pi} \right)^2}$	

<p>7</p> <p>三角脉冲</p>	$\begin{cases} E\left(1 - \frac{2 f }{\tau}\right) & (f < \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (f \geq \frac{\tau}{2}) \end{cases}$		$\frac{E\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \frac{8E}{\omega^2\tau} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$	
<p>8</p> <p>锯齿脉冲</p>	$\begin{cases} \frac{E}{\tau}(1 + \sigma) & (-\sigma < f < 0) \\ 0 & \text{(其他)} \end{cases}$		$\frac{E}{\omega^2} (1 + j\omega\tau - e^{j\omega\tau})$	
<p>9</p> <p>梯形脉冲</p>	$\begin{cases} \frac{2E}{\tau - \tau_1} \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) & \left(-\frac{\tau}{2} < f < -\frac{\tau_1}{2}\right) \\ E & \left(-\frac{\tau_1}{2} < f < \frac{\tau_1}{2}\right) \\ \frac{2E}{\tau - \tau_1} \left(\frac{\tau}{2} - f\right) & \left(\frac{\tau_1}{2} < f < \frac{\tau}{2}\right) \\ 0 & \text{(其他)} \end{cases}$		$\frac{8E}{(\tau - \tau_1)\omega^2} \sin \frac{\omega(\tau + \tau_1)}{4} - \sin \frac{\omega(\tau - \tau_1)}{4}$	

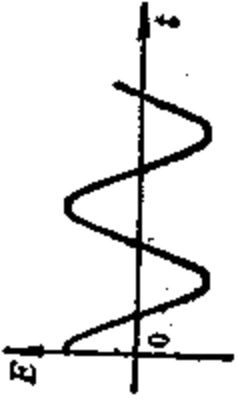
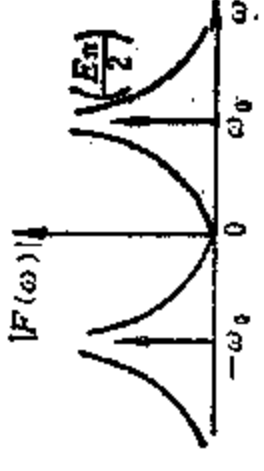
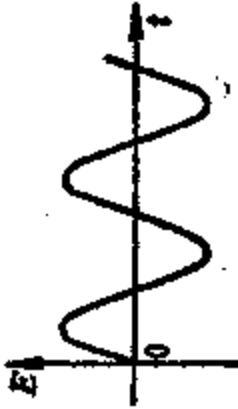
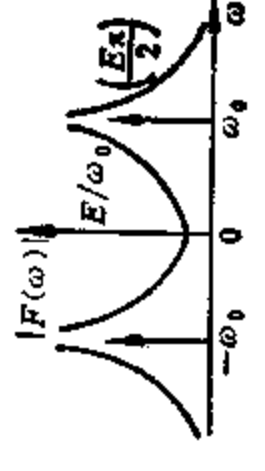
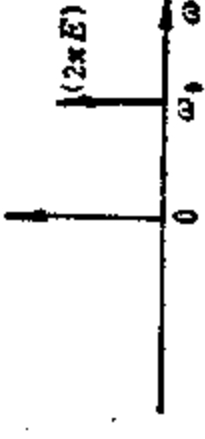
(续)

序号	信号名称	时间函数 $f(t)$	波形图	频域函数 $F(\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	频谱图
10	抽样脉冲	$S_a(\omega_c t) = \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$		$\begin{cases} \frac{\pi}{\omega_c} & (\omega < \omega_c) \\ 0 & (\omega > \omega_c) \end{cases}$	
11	指数脉冲	$1 \cdot e^{-at} U(t) \quad (a > 0)$		$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	
12	冲激函数	$\delta(t)$		E	


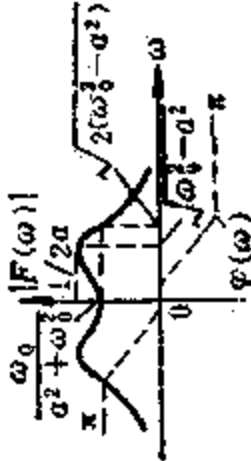

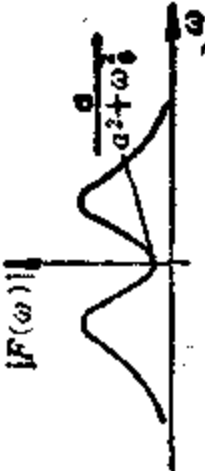
13	阶跃函数	$BU(t)$		$\frac{E}{j\omega} + \pi E \delta(\omega)$	
14	符号函数	$B \operatorname{sgn}(t)$		$\frac{2B}{j\omega}$	
15	直流信号	B		$2\pi E \delta(\omega)$	

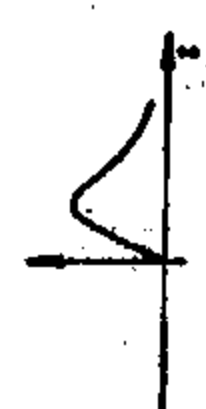
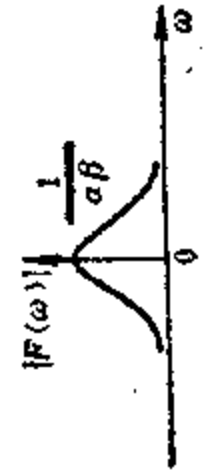



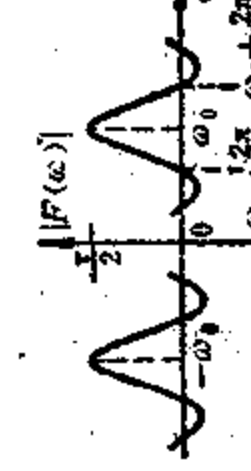
(续)

序号	信号名称	时间函数 $f(t)$	波形图	频谱函数 $F(\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	频谱图
16	冲激序列	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$		$\Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)$ $\left(\Omega e^{-\frac{2\pi}{T}}\right)$	
17	余弦信号	$E \cos \omega_0 t$		$E\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	
18	正弦信号	$E \sin \omega_0 t$		$jE[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	

19	单边余弦信号	$E \cos \omega_0 t U(t)$		$\frac{E\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{j\omega E}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
20	单边正弦信号	$E \sin \omega_0 t U(t)$		$\frac{E\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0 E}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
21	复指数信号	$E e^{j\omega_0 t}$		$2\pi E \delta(\omega - \omega_0)$	

(续)

序号	信号名称	时间函数 $f(t)$	波形图	频谱函数 $F(\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	频谱图
22	单边减幅 正弦信号	$e^{-at}\sin\omega_0 t U(t)$ $(a > 0)$		$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	
23	单边减幅 余弦信号	$e^{-at}\cos\omega_0 t U(t)$ $(a > 0)$		$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	

24	单边衰减信号	$\frac{1}{\beta - \alpha} [e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}] U(t)$ <p>($\alpha \neq \beta$)</p>		$\frac{1}{(j\omega + \alpha)(j\omega + \beta)}$	
25	斜变信号	$t U(t)$		$j\pi \delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$	
26	矩形调幅信号	$\left[U\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - U\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \cos \omega_0 t$		$\left[S_a \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2} + S_a \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right] \frac{\tau}{2}$	

3.2.5 信号的能量谱和功率谱

信号的能量密度函数(简称能量谱)和功率密度函数(简称功率谱)分别反映了信号的能量和功率的频率分布特性,在随机信号分析中有其特殊的作用。

1) 能量频谱 信号的能量频谱定义为单位带宽的信号能量。若以 W 代表信号的总能量,则

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

若令 $E(j\omega) = |F(j\omega)|^2/\pi$, $E(j\omega)$ 即为信号 $f(t)$ 的能量谱。由 $E(j\omega)$ 的表示式可见,信号的能量谱只决定于频谱函数的模量,而与相位无关。根据信号的能量谱可以看出信号能量在其各频率分量中分布的状况,从而相应地选择系统的通频带,以便充分利用该信号。

2) 功率频谱 若将周期信号 $f(t)$ 看作一个电压或电流,考察其作用于 1Ω 电阻上的功率平均值,则有

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt \\ &= |A_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \end{aligned}$$

(2.3-10)

称为信号的功率频谱。其中 $|A_0|^2$ 对应于直流分量, $\frac{1}{2}|A_n|^2$ 对应于第 n 次谐波分量作用于 1Ω 电阻上的平均功率, T 为信号周期。由式(2.3-10)可见,信号的功率频谱取决于各次谐波振幅的平方,而 $|A_n|$ 随 n 的增加一般呈递减趋势,故信号的能量主要集中在低频段。

3.3 连续系统的傅里叶分析

傅里叶分析包括两方面的内容,其一,对满足狄里赫利条件的周期信号可分解成谱频关系的傅里叶级数;其二,对存在傅里叶变换的非周期信号可用傅里叶积分表示。于是线性系统对任一激励信号的零状态响应可通过对每一频率分量求响应,然后迭加得到。这里信号的分解及求响应都在频率范围

中进行,故又称为频域分析法。

1) 谐波分析法 线性系统的非正弦周期信号响应可用谐波分析法求取。其步骤如下:

(1) 求输入周期信号的第 n 次谐波复振幅 A_n , 并计算 $n = 0, 1, 2, \dots$ 时的值。

(2) 作出所给系统的相量模型, 求出正弦传输函数 $H(jn\Omega)$, 并计算 $n = 0, 1, 2, \dots$ 时的值。

(3) 用相量法计算各次谐波的响应复振幅 $\dot{Y}(jn\Omega)$, 即 $\dot{Y}(jn\Omega) = H(jn\Omega)A_n$ 。

(4) 根据各次谐波响应复振幅 $\dot{Y}(jn\Omega)$ 写出时域响应函数, 然后迭加, 得稳态响应。

用谐波分析法难以得到响应的封闭解, 在实际计算中, 往往只取级数前 n 项作为近似(如 $n = 3 \sim 5$)。

2) 频谱函数法 线性系统的非周期信号响应可用频谱函数法求取。步骤如下:

(1) 求非周期输入信号的频谱函数 $F(j\omega)$;

(2) 确定所给线性系统的传递函数 $H(j\omega)$;

(3) 计算响应的频谱函数

$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$$

(4) 对响应频谱函数取傅里叶反变换, 得对输入 $f(t)$ 的零状态响应

$$y_f(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)]$$

如果系统的零输入响应

$$y_x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \text{ 则其完全响应}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} + \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)], \quad (t \geq 0) \quad (2.3-11)$$

式中 C_i 由初始条件确定, λ_i 为由系统结构决定的系统固有频率。

频谱函数法的第二步, 即系统传递函数 $H(j\omega)$ 的确定, 可根据实际情况通过如下几种途径求得: 由系统结构及元件参数求; 由描述系统输入-输出关系的线性常微分方程并利用傅里叶变换的微分性质求; 由系统的单位冲激响应求, 因为 $H(j\omega)$ 与 $h(t)$ 是一傅里叶变换对, 即

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \mathcal{F}[h(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (2.3-12)$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

(2.3-13)

应当指出, 傅里叶变换作为一种数学工具, 一般多用于对信号的分析, 而求信号通过线性系统的响应, 应用拉普拉斯变换更为方便些。

3.4 信号通过线性系统的无失真传输条件

除非有意识地用系统进行波形变换, 通常要求线性系统无失真传输信号, 即输出信号和输入信号相比只有幅值大小和出现时刻的不同, 而没有波形上的变化。无失真传输的时域条件为

$$y(t) = Kf(t - t_0) \quad (2.3-14)$$

式中 K 为非负常数; t_0 为信号经过电路的延迟时间。

由无失真传输的时域条件可导出其频域条件为,

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = Ke^{-j\omega t_0}$$

或
$$\left. \begin{aligned} |H(j\omega)| &= K \\ \varphi(\omega) &= -\omega t_0 \end{aligned} \right\} \text{频域条件} \quad (2.3-15)$$

显然, 无失真传输要求系统函数的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 是一与信号频率无关的常数, 相频特性与频率成正比, 是一条过原点的直线, 其斜率为 $-t_0$ 。

为了实现无失真传输, 理论上要求系统具有无限带宽, 且其频率特性也难以满足上述的理想条件。因此, 信号在传输中将会产生幅度失真和相位失真。为了将失真限制在允许的范围内, 要求系统的通频带与信号的频带宽度相适应 (频率匹配), 即要求在信号占有的频带范围内, 系统的幅频特性和相频特性接近无失真传输条件。

4 连续系统的复频域分析

复频域分析是指用拉普拉斯 (Laplace) 变换的方法分析信号和系统。拉氏变换使单值时间函数 $f(t)$ 与它的拉氏变换 $F(s)$ 之间建立起唯一的对应关系, 从而使连续时间系统的分析得到了简化。用拉氏变换方法分析线性系统有以下主要优点:

(1) 将时域函数的积分-微分方程变换成复频域的代数方程 (或称象方程), 且初始条件自动地包含在象方程中。

(2) 所得的解是系统的完全响应, 避免了确定积分常数的运算。

(3) 利用系统函数的概念, 使冲激响应得到有效的应用, 且揭示出系统的时域特性和频域特性之间的紧密联系。

4.1 拉普拉斯变换

定义 若已知时间函数 $f(t)$, 则其双边拉氏变换

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\infty < t < \infty) \quad (2.3-16)$$

如果 $f(t)$ 是有始函数, 即 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$, 则其拉氏变换

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

$$(0 \leq t < \infty) \quad (2.3-17)$$

习惯上称之为单边拉氏变换, 简称拉氏变换, 记为:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

拉氏变换的存在条件为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt = \text{有限值}$$

式中 σ 为正实数。能够满足上述存在条件的 σ 称为拉氏变换存在的实数边界条件, 即 $\text{Re}(s) (= \sigma) > \sigma$ 时, $f(t)$ 的拉氏变换存在。 $s = \sigma + j\omega$ 为复数, 称为复频率。

如果 $f(t)$ 为单值函数, 并且其拉氏变换存在, 即 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则 $f(t)$ (原函数) 与它的拉氏变换 $F(s)$ (或称为象函数) 之间具有唯一的对应关系, 即

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds,$$

$$0 \leq t < \infty \quad (2.3-18)$$

后者称为单边拉普拉斯反变换或 $F(s)$ 的原函数, 记作:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

4.2 拉普拉斯变换的性质 (见表 2.3-7)

表2-3-7 拉普拉斯变换的性质

名称	时域 $f(t) \quad t \geq 0$	复频域 $F(s)$
线性	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
尺度变换	$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} F(s/a)$
时移	$f(t-t_0)U(t-t_0)$	$e^{-st_0} \cdot F(s)$
	$f(at-b)U(at-b)$ $a > 0, \quad b \geq 0$	$\frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} F(s/a)$
频移	$e^{\pm at} f(t)$	$F(s \mp a)$
时域微分	$f'(t)$	$sF(s) - f(0^-)$
	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-1-m} f^{(m)}(0^+)$
时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s) - \frac{1}{s} f(0^+)$
时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) F_2(s)$
S域微分	$(-t)^n f(t)$	$\frac{d^n}{ds^n} F(s)$
S域积分	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^{\infty} F(\eta) d\eta$
初值定理	若 $f(0^+)$ 存在, 且 $F(s)$ 为 s 的真分式, 则 $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$	
终值定理	若 $f(\infty)$ 存在, 则 $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$	

4.3 拉普拉斯反变换

1) 部分分式展开 (亥维赛展开定理) 有理函数 $F(s)$ 可表示为:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

式中 系数 a_i, b_i 为实数, m 和 n 为正整数。

若 $m > n$, 则 $F(s)$ 可分解为多项式和真分式之和, 而多项式的拉氏反变换为冲激函数 $\delta(t)$ 及其各阶导数。所以只需讨论象函数为 S 的有理真分式的情况, 即 $m < n$ 。一般说来, 若 $m < n$, $A(s) = 0$ 的根可分为三种类型:

(1) $A(s) = 0$ 有 n 个单根, 则 $F(s)$ 的部分分式展开式为:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \dots + \frac{K_n}{s-s_n}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-s_i}$$

系数 $K_i = (s-s_i) \frac{B(s)}{A(s)} \Big|_{s=s_i}$

原函数 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

$$= \sum_{i=1}^n K_i e^{s_i t}, \quad t \geq 0$$

(2.3-19)

(2) $A(s) = 0$ 含有共轭复根。为简便，设只有一对共轭复根 $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ，则

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = F_1(s) + F_2(s)$$

$$= \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_2}{s + \alpha + j\beta} + F_2(s)$$

$$F_1(s) = \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_2}{s + \alpha + j\beta}$$

$$K_1 = \frac{B(s)}{\frac{d}{ds} A(s)} \Big|_{s=s_1} = \frac{B(-\alpha + j\beta)}{A'(-\alpha + j\beta)}$$

$$= K_2^*$$

式中 $F_1(s)$ 为有关共轭极点的部分； $F_2(s)$ 是除共轭极点外的其余部分；系数 K_1 和 K_2 是一对共轭复数。

取 $F_1(s)$ 的反变换，得：

$$f_1(t) = 2|K_1|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta), \quad t \geq 0$$

于是， $F(s)$ 的原函数为：

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = 2|K_1|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)], \quad t \geq 0$$

(2.3-20)

(3) $A(s) = 0$ 有重根，设只在 $s = s_1$ 处有 r 重根（即 $n = r$ ），则

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-s_1)^r}$$

$$= \frac{K_{11}}{(s-s_1)^r} + \frac{K_{12}}{(s-s_1)^{r-1}} + \dots + \frac{K_{1r}}{s-s_1}$$

式中之系数

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}$$

$$\cdot [(s-s_1)^r F(s)] \Big|_{s=s_1}$$

($i = 1, 2, \dots, r$)

于是得 $F(s)$ 的原函数

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^r \frac{K_{1i}}{(s-s_1)^{r+1-i}} \right]$$

$$= e^{s_1 t} \sum_{i=1}^r \frac{K_{1i}}{(r-i)!} t^{r-i},$$

$t \geq 0$

(2.3-21)

在有理函数部分分式展开中，一般要遇到上述三种情况的组合。

2) 反演积分法（留数法）拉普拉斯反变换的表示式为：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds,$$

$$t \geq 0$$

根据复变函数理论：

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \text{Res}_i, \quad t \geq 0 \quad (2.3-22)$$

式中 Res_i 为 $F(s)$ 的第 i 个极点的留数。

若 $F(s)$ 在 $s = s_1$ 处为 r 重极点，则

$$\text{Res}_i = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} (s-s_1)^r \cdot F(s) \cdot e^{st} \right]_{s=s_1}, \quad t \geq 0 \quad (2.3-23)$$

3) 根据拉氏变换的性质求反变换 有些情况下，如 $F(s) = (1 - e^{-t_0 s})/s$ ，求其原函数时，既不能应用留数法（因为 $s = 0$ 不是 $F(s)$ 的极点），也不能直接应用部分分式法（因为 $F(s)$ 不是 s 的有理分式）。根据拉氏变换的性质，得：

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-t_0 s} \right]$$

$$= U(t) - U(t - t_0)$$

4.4 拉普拉斯变换表

表2.3-8示出了常见信号的拉普拉斯变换。

表 2-3-8 常见拉普拉斯变换对

序 号	原函数 $f(t), t \geq 0$	象函数 $F(s)$
01	$\delta(t)$	1
02	$\delta'(t)$	s
03	$U(t)$	$\frac{1}{s}$
04	$U(t-t_0), t_0 > 0$	$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$
05	$b_0 e^{-at}$	$\frac{b}{s+a}$
06	t	$\frac{1}{s^2}$
07	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
08	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
09	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
10	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
11	$\cos(bt + \phi)$	$\frac{s \sin \phi + b \cos \phi}{s^2+b^2}$
12	$\sin(bt + \phi)$	$\frac{s \sin \phi - b \cos \phi}{s^2+b^2}$
13	$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
14	$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
15	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

(续)

序号	原函数 $f(t), t \geq 0$	象函数 $F(s)$
16	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
17	$e^{at} \cosh bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$
18	$e^{at} \sinh bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$
19	$e^{at} [A + (aA + B)t]$	$\frac{As + B}{(s-a)^2}$
20	$e^{at} \left[A \cos \sqrt{b^2 - a^2} t + \frac{aA + B}{\sqrt{b^2 - a^2}} \sin \sqrt{b^2 - a^2} t \right]$	$\frac{As + B}{s^2 - 2as + b^2} \quad a^2 < b^2$
21	$t \cos bt$	$\frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$
22	$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$
23	$t \cosh bt$	$\frac{s^2 + b^2}{(s^2 - b^2)^2}$
24	$t \sinh bt$	$\frac{2bs}{(s^2 - b^2)^2}$
25	$\frac{1}{2} t^2 \cos bt$	$\frac{s(s^2 - 3b^2)}{(s^2 + b^2)^3}$
26	$\frac{1}{2} t^2 \sin bt$	$\frac{b(3s^2 - b^2)}{(s^2 + b^2)^3}$
27	$\frac{1}{2} t^2 \cosh bt$	$\frac{s(s^2 + 3b^2)}{(s^2 - b^2)^3}$
28	$\frac{1}{2} t^2 \sinh bt$	$\frac{b(3s^2 + b^2)}{(s^2 - b^2)^3}$
29	$\frac{1}{6} t^3 \cos bt$	$\frac{s^4 - 6b^2s^2 + b^4}{(s^2 + b^2)^4}$

(续)

序号	原函数 $f(t), t \geq 0$	象函数 $F(s)$
30	$\frac{1}{6}t^3 \sin bt$	$\frac{4bs^3 - 4b^3s}{(s^2 + b^2)^4}$
31	$\frac{1}{6}t^3 \operatorname{ch} bt$	$\frac{s^4 + 6b^2s^2 + b^4}{(s^2 - b^2)^4}$
32	$\frac{1}{6}t^3 \operatorname{sh} bt$	$\frac{4bs^3 + 4b^3s}{(s^2 - b^2)^4}$
33	$\frac{1}{2b^2}(\sin bt - bt \cos bt)$	$\frac{1}{(s^2 + b^2)^2}$
34	$\frac{1}{2b}(\sin bt + bt \cos bt)$	$\frac{s^2}{(s^2 + b^2)^2}$
35	$\cos bt - \frac{1}{2}bt \sin bt$	$\frac{s^3}{(s^2 + b^2)^2}$
36	$\frac{1}{2b}(bt \operatorname{ch} bt - \operatorname{sh} bt)$	$\frac{b^2}{(s^2 - b^2)^2}$
37	$\frac{1}{2b}(bt \operatorname{ch} bt + \operatorname{sh} bt)$	$\frac{s^2}{(s^2 - b^2)^2}$
38	$\operatorname{ch} bt + \frac{1}{2}\operatorname{sh} bt$	$\frac{s^3}{(s^2 - b^2)^2}$
39	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}, a \neq b$
40	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}, a \neq b$
41	$\frac{e^{at} - [1 + (a - b)t]e^{bt}}{(a - b)^2}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)^2}, a \neq b$
42	$\frac{a \cdot e^{at} - [a + b(a - b)t]e^{bt}}{(a - b)^2}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)^2}, a \neq b$
43	$\frac{a^2 e^{at} - [2ab - b^2 + b^2(a - b)t]e^{bt}}{(a - b)^2}$	$\frac{s^2}{(s - a)(s - b)^2}, a \neq b$

(续)

序号	原函数 $f(t), t \geq 0$	象函数 $F(s)$
44	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$	$\frac{ab}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
45	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
46	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
47	$\frac{a^2 \cos at - b^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
48	$\frac{b \cdot \text{sh} at - a \text{sh} bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{ab}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$
49	$\frac{\text{ch} at - \text{ch} bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{s}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$
50	$\frac{a \text{sh} at - b \text{sh} bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$
51	$\frac{a^2 \text{ch} at - b^2 \text{ch} bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$
52	$\frac{1}{3b^2} \left[e^{-bt} - e^{bt/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}bt}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}bt}{2} \right) \right]$	$\frac{1}{s^2 + b^2}$
53	$\frac{1}{3b} \left[-e^{-bt} + e^{bt/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}bt}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}bt}{2} \right) \right]$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
54	$\frac{1}{3} \left[e^{-bt} + 2e^{bt/2} \cos \frac{\sqrt{3}bt}{2} \right]$	$\frac{s^2}{s^2 + b^2}$
55	$\frac{1}{3b^2} \left[e^{bt} - e^{-bt/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}bt}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}bt}{2} \right) \right]$	$\frac{1}{s^2 - b^2}$
56	$\frac{1}{3b} \left[e^{bt} - e^{-bt/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}bt}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}bt}{2} \right) \right]$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$
57	$\frac{1}{3} \left[e^{bt} + 2e^{-bt/2} \cos \frac{\sqrt{3}bt}{2} \right]$	$\frac{s^2}{s^2 - b^2}$

(续)

序号	原函数 $f(t), t \geq 0$	象函数 $P(s)$
58	$\frac{1}{4b^2}(\sin bt \cosh bt - \cos bt \sinh bt)$	$\frac{1}{s^2 + 4b^2}$
59	$\frac{1}{2b^2} \sin bt \sinh bt$	$\frac{s}{s^2 + 4b^2}$
60	$\frac{1}{2b}(\sin bt \cosh bt + \cos bt \sinh bt)$	$\frac{s^2}{s^2 + 4b^2}$
61	$\cos bt \cosh bt$	$\frac{s^2}{s^2 + 4b^2}$
62	$\frac{1}{2b^2}(\sinh bt - \sin bt)$	$\frac{1}{s^2 - b^2}$
63	$\frac{1}{2b^2}(\cosh bt - \cos bt)$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$
64	$\frac{1}{2b}(\sinh bt + \sin bt)$	$\frac{s^2}{s^2 - b^2}$
65	$\frac{1}{2}(\cosh bt + \cos bt)$	$\frac{s^2}{s^2 - b^2}$
66	$\frac{1}{t}(e^{at} - e^{bt})$	$\ln \frac{s-a}{s-b}$
67	$\frac{2 \sinh bt}{t}$	$\ln \frac{s+a}{s-b}$
68	$\frac{2(\cos bt - \cos at)}{t}$	$\ln \frac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}$
69	$\frac{2(\cosh bt - \cosh at)}{t}$	$\ln \frac{s^2 - a^2}{s^2 - b^2}$
70	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
71	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$

(续)

序号	原函数 $f(t), t \geq 0$	象函数 $F(s)$
72	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{2t\sqrt{\pi t}}$	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$
73	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{2(b-a)t\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s-a} + \sqrt{s-b}}$
74	$\frac{\cos 2\sqrt{bt}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-b/s}}{\sqrt{s}}$
75	$\frac{\text{ch } 2\sqrt{bt}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{b/s}}{\sqrt{s}}$
76	$\frac{\sin 2\sqrt{bt}}{\sqrt{\pi b}}$	$\frac{e^{-b/s}}{s\sqrt{s}}$
77	$\frac{\text{sh } 2\sqrt{bt}}{\sqrt{\pi b}}$	$\frac{e^{b/s}}{s\sqrt{s}}$
78	$\frac{\sin bt}{t}$	$\text{arc tg } \frac{b}{s}$
79	$U(t) - U(t-t_0)$	$\frac{1 - e^{-t_0 s}}{s}$
80	$tU(t) - (t-t_0)U(t-t_0)$	$\frac{1 - e^{-t_0 s}}{s^2}$
81	$t[U(t) - U(t-t_0)]$	$\frac{1 - (t_0 s + 1)e^{-t_0 s}}{s^2}$
82	$tU(t) - 2(t-t_0)U(t-t_0) + (t-2t_0)U(t-2t_0)$	$\frac{(1 - e^{-t_0 s})^2}{s^2}$
83	$\delta_T(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \dots + \delta(t-nT) + \dots$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}}$

4-5 复频域 (s 域) 分析

4-5-1 微分方程的变换解法

描述线性非时变连续系统输入-输出关系的数学模型是常系数线性微分方程，而拉普拉斯变换是求解线性微分方程的有力工具。

利用这种方法分析线性系统的步骤为：

- (1) 列写描述系统输入-输出关系的微分方程；
- (2) 对所列写的微分方程取拉氏变换，得到象函数的代数方程；

(3) 求解 s 域代数方程得响应的象函数;

(4) 对响应的象函数取拉氏逆变换得到响应函数。

这种分析方法的优点是:

(1) 求解步骤简明而有规律, 其初始状态包含在象函数方程中, 可一举求得方程的全解;

(2) 拉氏变换把微分、积分方程变换为代数方程, 因而求解方便, 这对于求解微分方程组更为有利;

(3) 在分析线性网络问题时, 甚至不必列出微分方程, 只要利用元件的 s 域模型, 就可直接列出象函数方程。

4.5.2 线性网络的 s 域元件模型

R 、 L 、 C 元件的 s 域模型如图 2-3-2 所示。

图 2-3-2 中: 元件符号是 s 域中广义欧姆定律的符号, 即电阻符号表示以下关系:

$$U_R(s) = RI_R(s)$$

而电感与电容的符号分别表示 (不考虑起始条件):

$$U_L(s) = sLI_L(s)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s)$$

电感与电容的起始状态的影响在图 2-3-2 中用串联电压源表示。这样做的实质是把基尔霍夫电压定律和基尔霍夫电流定律直接用于 s 域。

然而, 图 2-3-2 的模型并非唯一的。在列写节点方程时用图 2-3-3 的模型更方便, 而列写回路方程时宜采用图 2-3-2。不难看出, 把戴维南定理与诺顿定理直接用于 s 域也是可以的, 图 2-3-2 中的电压源变为图 2-3-3 的电流源就说明了这点。

把网络中每个元件都用它的 s 域模型来代替, 把激励信号直接写作变换式, 这样就得到全部网络的 s 域模型, 对此电路模型采用 KVL 和 KCL 分析, 即可获得响应函数的变换式。这时, 所进行的数学运算是代数关系, 它与电阻性网络的分析方法一样。

4.5.3 线性系统的系统函数

1) 系统传递函数 在线性非时变系统中, 零状态响应 $y_f(t)$ 的拉氏变换 $Y_f(s)$ 与激励 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 之比, 称为系统的传递函数或系统函数 $H(s)$, 即

$$H(s) = \frac{\text{零状态响应的拉氏变换}}{\text{输入函数的拉氏变换}} \\ = \frac{Y_f(s)}{F(s)}$$

2) 系统函数的性质

(1) 对任一线性定常系统, 冲激响应的拉氏变换就是该系统相应的系统函数, 即

$$\mathcal{L}[h(t)] = H(s)$$

或 $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$

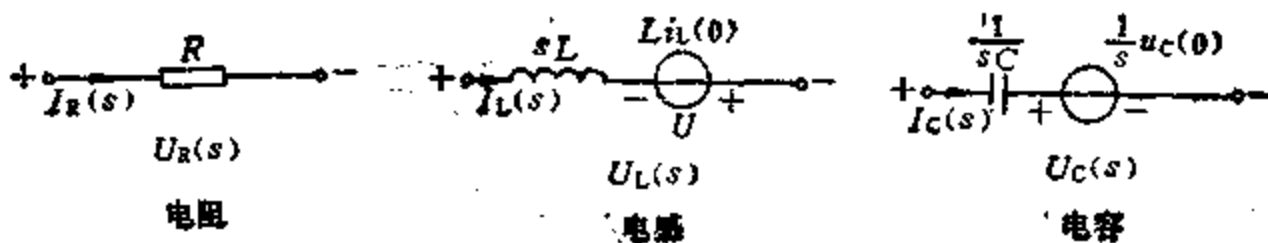


图 2-3-2 s 域元件模型 (回路分析)

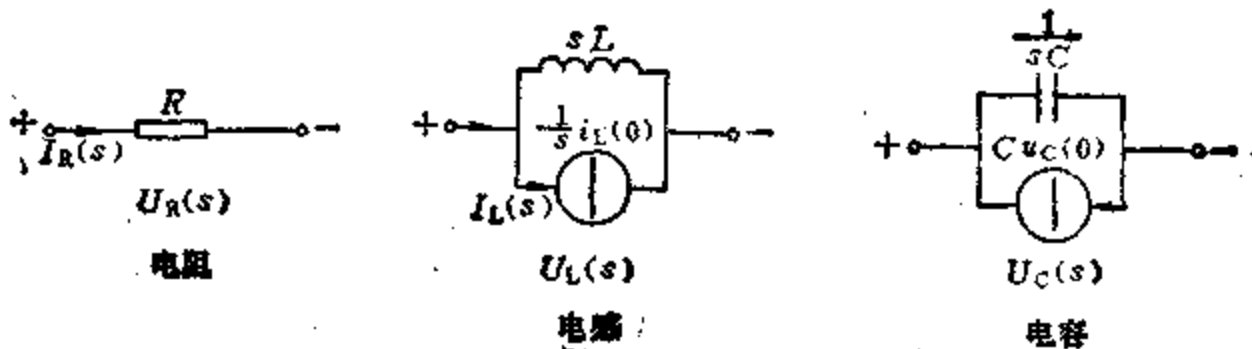


图 2-3-3 s 域元件模型 (节点分析)

且

$$y_i(t) = h(t) * f(t) \\ = \mathcal{L}^{-1}[H(s)F(s)]$$

所以，系统函数为计算系统的冲激响应提供了较简便的方法，它是计算零状态响应的重要工具。

2) 线性定常系统的系统函数 $H(s)$ 是 s 的实系数有理函数，它的极点是该系统的自然（固有）频率。（当 $H(s)$ 中的分子与分母因子不相消时，极点就是电路微分方程的特征根）。系统函数零极点的定义与一般象函数 $F(s)$ 零极点定义相同。所以 $H(s)$ 极点在 s 平面的分布情况可定性地预言电路的时域特性。通常将 $H(s)$ 的全部极点都在左半开 s 平面的系统称为稳定的；把在 $j\omega$ 轴上有一阶极点的系统称为临界稳定的；凡有极点在右半开 s 平面或 $j\omega$ 轴上有高阶极点的系统称为不稳定的。

(3) 全部极点在左半开 s 平面的线性非时变系统，在 $s = j\omega$ 时具有 $H(s) = H(j\omega)$ 形式，这正是该系统的正弦传递函数，即频率响应。

3) 线性系统的完全响应 若以 $y_x(t)$ 和 $y_f(t)$ 分别表示线性系统的零输入响应和零状态响应，并且假定系统函数具有 n 个单极点，则其完全响应

$$y(t) = y_x(t) + y_f(t) \\ = \sum_{k=1}^n C_k e^{s_k t} + \mathcal{L}^{-1}[H(s)F(s)], \quad t \geq 0$$

式中 C_k 由初始状态决定；等号右边第一项为系统的零输入响应。

4.5.4 多输入、多输出系统的分析

假设线性系统具有 n 个 ($n \geq 2$) 输入， m 个 ($m \geq 2$) 输出，则称之为多输入、多输出系统。在零初始条件下，任意两个输出与输入之间的传递函数定义为：

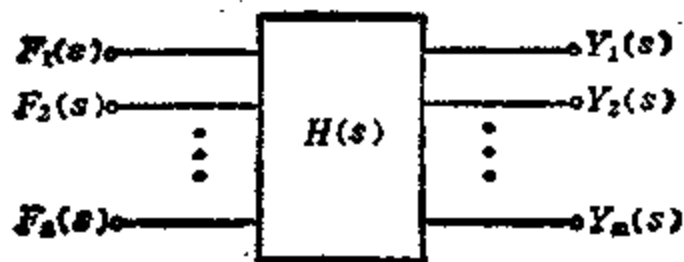


图2-3-4 多输入多输出系统

$$H_{ij}(s) = \frac{\text{第 } i \text{ 个输出的拉氏变换 } Y_i(s)}{\text{第 } j \text{ 个输入的拉氏变换 } F_j(s)}$$

如图 2-3-4 所示。由于在这类系统中，每个输出一般与各个输入都有关系，其系统函数为矩阵形式，即

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1n}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2n}(s) \\ \vdots & & & \vdots \\ H_{m1}(s) & H_{m2}(s) & \cdots & H_{mn}(s) \end{bmatrix}$$

利用矩阵拉氏变换的规则可得：

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)F(s)]$$

或

$$y_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_{ij}(s)F_j(s)]$$

式中 $F(s) = [F_1(s) F_2(s) \cdots F_n(s)]^T$ ；

$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s) Y_2(s) \cdots Y_m(s)]^T$ ； $i = 1, 2, \dots, m$ ； $j = 1, 2, \dots, n$ 。

5 离散时间信号与系统

众所周知，数字计算机提供的信号就是典型的高散（量化）信号。对连续时间信号抽样也能获得离散时间信号，在满足抽样定理的条件下，抽样信号蕴涵着原连续信号的全部信息。

5.1 离散时间信号与抽样定理

5.1.1 离散时间信号

只在各个离散瞬间 $t = 0, \pm T, \pm 2T, \dots, \pm kT, \dots$ 上存在函数值，其他时间没有定义的序列 $f(kT)$ ，称为离散时间信号。也就是说，离散信号是由一组序列值构成的集合 $\{f(kT)\}$ ，当 T 取常数值时简记为 $\{f(k)\}$ 。

5.1.2 几种常用序列

1) 单位函数（单位序列或单位冲激序列）

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

2) 单位阶跃序列

$$U(k) = \begin{cases} 1 & (k \geq 0) \\ 0 & (k < 0) \end{cases}$$

3) 矩形序列

$$G_N(k) = \begin{cases} 1 & (0 \leq k \leq N-1) \\ 0 & (k < 0, k \geq N) \end{cases}$$

上述三种序列间存在着以下联系，即

$$U(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n)$$

$$\delta(k) = U(k) - U(k-1)$$

$$G_N(k) = U(k) - U(k-N)$$

实际上,任何序列 $f(k)$ 都可表示成如下形式:

$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(k-n)$$

4) 斜升序列

$$r(k) = kU(k)$$

5) 指数序列

$$f(k) = a^k U(k), \quad (a \text{ 为常数})$$

6) 正弦序列

$$f(k) = \sin \omega_0 k \quad \text{或} \quad f(k) = \cos \omega_0 k$$

式中 ω_0 称为正弦序列的角频率, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 称为正弦序列的周期 (此处假定 T_0 不是无理数)。

7) 复指数序列

$$f(k) = e^{j\omega_0 k} = \cos \omega_0 k + j \sin \omega_0 k$$

5.1.3 抽样定理

在数字信号处理中,抽样定理具有极重要的理论意义。众所周知,离散时间信号 $f(k)$ 可由连续时间信号 $f(t)$ 经理想均匀抽样得到。设 $f(t)$ 是带宽有限连续时间信号, $\delta_T(t)$ 是抽样脉冲, $f_s(t)$ 是抽样信号。 $f(t)$ 、 $\delta_T(t)$ 、 $f_s(t)$ 及其频谱示于图 2-3-5。由图可见,抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(j\omega)$ 是 $f(t)$ 频谱 $F(j\omega)$ 的周期性重复,其重复

周期为 ω_s , 而 $\omega_s = 2\pi/T_s$ 。若 $\omega_s \geq 2\omega_m$, 则 $F(j\omega)$ 的波形就会在 $F_s(j\omega)$ 的频谱图中重复出现而不重叠。图 2-3-5 中表示的正是这种情况。

抽样定理 若 $f(t)$ 为有限带宽连续时间信号,在其最高频率 $\omega_m = 2\pi f_m$ 以上没有频谱成份,当抽样间隔是均匀的且不大于 $1/(2f_m)$ 时,则抽样信号 $f_s(t)$ 就包含了 $f(t)$ 的全部信息。也就是说,上述条件满足时,信号 $f(t)$ 可以由它的抽样函数 $f_s(t)$ 唯一地表示出来。

习惯上把抽样定理成立的最大抽样间隔 $T = 1/(2f_m)$ 称为奈奎斯特抽样间隔,将 $2f_m$ 称为奈奎斯特抽样率。

5.2 离散系统的时域分析

5.2.1 差分方程

如果离散时间系统的输入为 $f(k)$, 输出为 $y(k)$, 则其时域描述为常系数线性差分方程,即

$$\begin{aligned} y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \dots + a_0y(k) \\ = b_n f(k) + b_{n-1}f(k-1) \\ + \dots + b_0 f(k-m) \end{aligned} \quad (2-3-24)$$

式中 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 和 $b_j (j = 0, 1, \dots, m)$ 都是常数。

差分方程的阶数等于方程中未知序列变量的最高与最低序号之差。显然,上述方程为 n 阶差分方程。

5.2.2 差分方程的求解方法

常系数线性差分方程可以用以下几种方法求解:

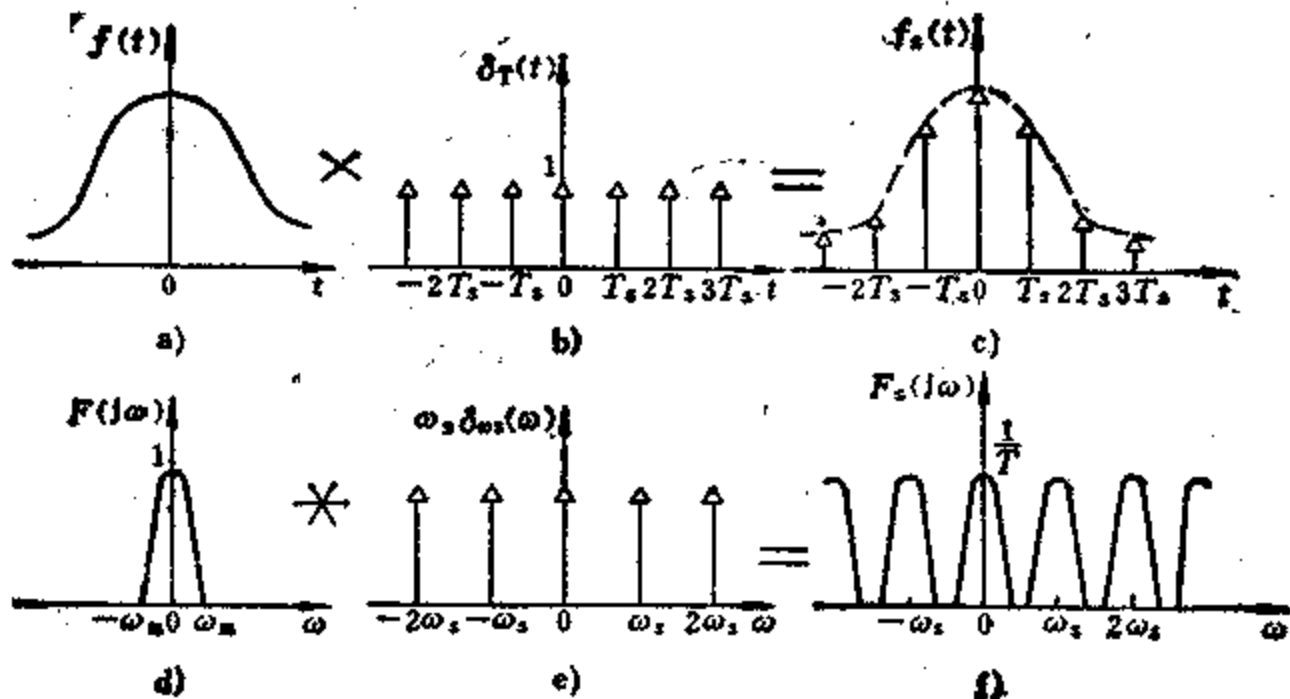


图2-3-5 理想抽样

1) 递推法 (或迭代法) 利用初始条件逐次代入差分方程求解。此法的缺点是难以得到闭式解。

2) 时域经典法 分别求出差分方程的齐次解与特解, 两者迭加即完全解。

3) 零输入和零状态解 若将差分方程的解分解为零输入解和零状态解, 则零输入解的形式由特征方程的根所决定, 零状态解可用卷积和计算。

4) z 变换解法 这是在 z 域中解差分方程, 其求解过程与用拉氏变换法求解微分方程十分类似。

5.2.3 差分方程的经典解法

1) 齐次解 如式 (2.3-24) 所示的差分方程, 其特征方程为:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (2.3-25)$$

它有 n 个根 λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 称为差分方程的特征根。依特征根的特点, 差分方程的齐次解有两种类型:

(1) 特征根均为单根 如果 n 个特征根都互不相同, 则差分方程的齐次解为:

$$y_o(k) = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^k \quad (2.3-26)$$

式中 常数 C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 由 n 个初始条件确定。

(2) 特征根有重根 若 λ_1 是特征方程的 r 重根, 而其余 $n - r$ 个根是单根, 则差分方程的齐次解为

$$y_o(k) = \sum_{i=1}^r C_i k^{r-i} \lambda_1^k + \sum_{j=r+1}^n C_j \lambda_j^k \quad (2.3-27)$$

2) 特解 特解的函数形式与激励函数的形式有关。表 2.3-9 列出几种典型的激励 $f(k)$ 所对应的特解 $y_p(k)$ 。选定特解后, 将它代入到原差分方程, 求出其待定系数 p_i , 就得出方程的特解。

3) 全解 线性差分方程的完全解是其齐次解与特解之和。如果方程的特征根均为单根, 则差分方程的全解为:

表 2.3-9 典型激励的特解

激励 $f(k)$	特解 $y_p(k)$
k^n	$p_n k^n + p_{n-1} k^{n-1} + \dots + p_1 k + p_0$
a^k	$p a^k$, 当 a 不是特征根时 $p_1 \cdot k \cdot a^k + p_0 a^k$, 当 a 是特征单根时 $p_r k^r a^k + p_{r-1} k^{r-1} a^k + \dots + p_1 k a^k + p_0 a^k$, 当 a 是特征方程的 r 重根时

$$y(k) = y_o(k) + y_p(k)$$

$$= \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^k + y_p(k) \quad (2.3-28)$$

如果特征根 λ_1 为 r 重根, 其余 $n - r$ 个为单根时, 差分方程的全解为

$$y(k) = \sum_{i=1}^r C_i k^{r-i} \lambda_1^k + \sum_{j=r+1}^n C_j \lambda_j^k + y_p(k) \quad (2.3-29)$$

式中 各系数 C_i 、 C_j 由边界条件确定。

在一般情况下, 对于 n 阶差分方程, 应给定 n 个边界条件, 例如取 $y(0)$ 、 $y(1)$ 、 \dots 、 $y(n-1)$ 。利用这些条件即可求得 n 个待定系数 C_i 、 C_j 。还需强调指出, 差分方程的边界条件不一定由 $y(0)$ 、 $y(1)$ 、 \dots 、 $y(n-1)$ 这一组数给出。对于 n 阶系统, 只要是独立的 n 个 $y(k)$ 值就可做为边界条件来确定系数 C。例如, 对于因果系统, 常用 $y(-1)$ 、 $y(-2)$ 、 \dots 、 $y(-n)$ 为边界条件。若激励信号在 $k = 0$ 时接入系统, 则这组数可能并不是 $y(k)$ 之值, 欲确定系数 C, 需将这组数逐次代入差分方程, 求得 $y(k)$ 的 n 个值 $y(0)$ 、 $y(1)$ 、 $y(2)$ 、 \dots 、 $y(n-1)$, 由这组数值即可确定 n 个待定系数。

5.2.4 零输入响应和零状态响应

线性系统具有响应的可分解性, 其全响应可分解为零输入响应和零状态响应之和。

1) 零输入响应 零输入响应是激励为零时仅由初始状态所引起的响应, 用 $y_z(k)$ 表示。对于式 (2.3-24) 所示的差分方程, 若激励信号 $f(k)$ 在 $k = 0$ 时接入系统, 所谓初始状态是指 $y(-1)$ 、

$y(-2)$ 、 \dots 、 $y(-n)$ ，而不是 $y(0)$ 、 $y(1)$ 、 \dots 、 $y(n-1)$ 。

系统零输入响应的数学模式与齐次解相同，所不同的是前者由 $y(-1)$ 、 $y(-2)$ 、 \dots 、 $y(-n)$ 确定待定系数，后者需由 $y(0)$ 、 $y(1)$ 、 \dots 、 $y(n-1)$ 确定系数。

2) 零状态响应 若 n 阶离散系统的初始状态为零，仅由输入信号 $f(k)$ 所引起的响应称为零状态响应，用 $y_f(k)$ 表示。

如果离散系统的单位函数响应为 $h(k)$ ，输入序列为 $f(k)$ ，则其零状态响应 $y_f(k)$ 为 $h(k)$ 与 $f(k)$ 的离散卷积（或称卷积和），即

$$y_f(k) = h(k) * f(k) = \sum_{j=0}^k f(j)h(k-j)$$

$$= \sum_{j=0}^k f(k-j)h(j) \quad (2-3-30)$$

3) 单位函数响应 在线性离散系统中，若输入为单位函数 $\delta(k)$ ，则其零状态响应称为单位函数响应（简称单位响应），记作 $h(k)$ 。

单位函数响应表征了离散系统的结构特征，其作用与连续时间系统中冲激响应 $h(t)$ 很相似。

5.2.5 卷积和与卷积和表

卷积和的具体计算方法，请参阅参考文献[1]的第三章或文献[2]的第七章。表2-3-10列出常用因果序列的卷积和，以备查用。此外，在实际应用中借助离散傅里叶变换中的快速傅里变换算法，利用数字计算机可以较简便地求得两序列之卷积和，请参阅参考文献[2]第九章。

表2-3-10 卷积和表

序号	$f_1(k)$	$f_2(k)$	$f_1(k) * f_2(k)$
1	$f(k)$	$\delta(k)$	$f(k)$
2	$f(k)$	$U(k)$	$\sum_{i=-\infty}^k f(i)$
3	$U(k)$	$U(k)$	$(k+1)U(k)$
4	$kU(k)$	$U(k)$	$\frac{1}{2}k(1+k)U(k)$
5	$a^k \cdot U(k)$	$U(k)$	$\frac{1-a^{k+1}}{1-a}U(k)$
6	$a_1^k U(k)$	$a_2^k U(k)$	$\frac{a_1^{k+1} - a_2^{k+1}}{a_1 - a_2} U(k)$
7	$a^k U(k)$	$a^k U(k)$	$(k+1)a^k U(k)$
8	$kU(k)$	$a^k U(k)$	$\frac{k}{1-a}U(k) + \frac{a(a^k - 1)}{(1-a)^2}U(k)$
9	$kU(k)$	$kU(k)$	$\frac{1}{6}(k+1)k(k-1)U(k)$
10	$a_1^k \cos(\beta k + \theta)U(k)$	$a_2^k U(k)$	$\frac{a_1^{k+1} \cos[\beta(k+1) + \theta - \varphi] - a_2^{k+1} \cos(\theta - \varphi)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \beta}} U(k)$ $\varphi = \arctg \frac{a_1 \sin \beta}{\cos \beta - a_2}$

5.3 Z变换

Z变换是利用变换域方法分析离散系统的重要数学工具，其作用类似于连续时间系统分析中的拉普拉斯变换。

5.3.1 定义

如有离散时间序列 $f(k)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)，则函数

$$F(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)Z^{-k} \quad (2.3-31)$$

称为序列 $f(k)$ 的双边Z变换。

若序列 $f(k)$ 是因果信号，即 $f(k) = 0, k < 0$ 时，则

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)Z^{-k} \quad (2.3-32)$$

称为序列 $f(k)$ 的单边Z变换。如无特殊说明，本章所说的Z变换皆指单边Z变换。

由式 (2.3-32) 可知，序列 $f(k)$ 的Z变换 $F(Z)$ 是一个无穷级数，只有级数收敛时，即满足下式：

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f(k)Z^{-k}| < \infty \quad (2.3-33)$$

时，Z变换才存在；若级数不收敛，Z变换就不存在。能够使 $f(k)$ 的Z变换存在的Z值的集合，称为 $f(k)$ 的Z变换的收敛域。

5.3.2 Z变换的性质

Z变换的一些主要性质列于表2.3-11。

5.3.3 Z变换表

常见序列的Z变换见表2.3-12。

表2.3-11 单边Z变换的性质

名称	序域 $f(k)$	Z域 $F(Z), Z > \rho_0$
线性	$af_1(k) + bf_2(k)$	$aF_1(Z) + bF_2(Z), Z > \max(\rho_1, \rho_2)$
移位	$f(k-m)U(k)$	$Z^{-m}F(Z) + Z^{-m} \sum_{k=-m}^{-1} f(k)Z^{-k}$
	$f(k-m)U(k-m)$	$Z^{-m}F(Z)$
	$f(k+m)U(k)$	$Z^m F(Z) - Z^m \sum_{k=0}^{m-1} f(k)Z^{-k}$
k域乘 a^k	$a^k f(k)$	$F\left(\frac{Z}{a}\right), Z > a \rho_0$
k域卷积	$f_1(k) * f_2(k)$	$F_1(Z)F_2(Z), Z > \max(\rho_1, \rho_2)$
Z域微分	$k f(k)$	$\left(-Z \frac{d}{dZ}\right)^m \cdot F(Z), Z > \rho_0$
Z域积分	$\frac{f(k)}{k+m}, k+m > 0$	$Z^m \int_Z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta, Z > \rho_0$
	$\frac{f(k)}{k}, k > 0$	$\int_Z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} d\eta$

(续)

名称	序域 $f(k)$	Z域 $F(Z), Z > \rho_0$
部分和	$\sum_{i=0}^k f(i)$	$\frac{Z}{Z-1} \cdot F(Z), Z > \max(1, \rho_0)$
初值定理	$f(0) = \lim_{Z \rightarrow \infty} F(Z)$	
	$f(n) = \lim_{Z \rightarrow \infty} Z^n \left[P(Z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(i)Z^{-i} \right]$	
终值定理	$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{Z-1}{Z} F(Z), \rho_0 < 1$	

表2-3-12 Z变换表

序号	$f(k), k \geq 0$	$P(Z)$
1	$\delta(k)$	1
2	$\delta(k-n), n \geq 0$	Z^{-n}
3	$U(k)$	$\frac{Z}{Z-1}$
4	$U(k-n), n \geq 0$	$Z^{-n} \frac{Z}{Z-1}$
5	k	$\frac{Z}{(Z-1)^2}$
6	k^2	$\frac{Z^2+Z}{(Z-1)^3}$
7	k^3	$\frac{Z^3+4Z^2+Z}{(Z-1)^4}$
8	a^k	$\frac{Z}{Z-a}$
9	$\frac{a^k - (-a)^k}{2a}$	$\frac{Z}{Z^2-a^2}$
10	$\frac{a^k + (-a)^k}{2a}$	$\frac{Z^2}{Z^2-a^2}$

(续)

序号	$f(k), k \geq 0$	$F(Z)$
11	ka^k	$\frac{aZ}{(Z-a)^2}$
12	k^2a^k	$\frac{aZ^2+a^2Z}{(Z-a)^3}$
13	k^3a^k	$\frac{aZ^3+4a^2Z^2+a^3Z}{(Z-a)^4}$
14	$\frac{k(k-1)}{2}$	$\frac{Z}{(Z-1)^3}$
15	$\frac{k(k+1)}{2}$	$\frac{Z^2}{(Z-1)^3}$
16	$\frac{(k+2)(k+1)}{2}$	$\frac{Z^3}{(Z-1)^3}$
17	$k \cdot a^{k-1}$	$\frac{Z}{(Z-a)^2}$
18	$(k+1)a^k$	$\frac{Z^2}{(Z-a)^2}$
19	$\frac{k(k-1)\cdots(k-m-1)}{m!}$	$\frac{Z}{(Z-1)^{m+1}}$
20	$\frac{(k+1)\cdots(k+m) \cdot a^k}{m!}, m \geq 1$	$\frac{Z^{m+1}}{(Z-a)^{m+1}}$
21	$\frac{a^k - b^k}{a - b}$	$\frac{Z}{(Z-a)(Z-b)}$
22	$\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a - b}$	$\frac{Z^2}{(Z-a)(Z-b)}$
23	a^k	$\frac{Z}{Z-a}$
24	$a^k b^k$	$\frac{Z}{Z-ab}$

(续)

序 号	$f(k), k \geq 0$	$F(Z)$
25	$\cos \beta k$	$\frac{Z(Z - \cos \beta)}{Z^2 - 2Z \cos \beta + 1}$
26	$\sin \beta k$	$\frac{Z \sin \beta}{Z^2 - 2Z \cos \beta + 1}$
27	$\cos(\beta k + \theta)$	$\frac{Z^2 \cos \theta - Z \cos(\beta - \theta)}{Z^2 - 2Z \cos \beta + 1}$
28	$\sin(\beta k + \theta)$	$\frac{Z^2 \sin \theta + Z \sin(\beta - \theta)}{Z^2 - 2Z \cos \beta + 1}$
29	$a^k \cos \beta k$	$\frac{Z(Z - a \cos \beta)}{Z^2 - 2aZ \cos \beta + a^2}$
30	$a^k \sin \beta k$	$\frac{aZ \sin \beta}{Z^2 - 2aZ \cos \beta + a^2}$
31	$ka^k \cos \beta k$	$\frac{aZ(Z^2 + a^2) \cos \beta - 2a^2 Z^2}{(Z^2 - 2aZ \cos \beta + a^2)^2}$
32	$ka^k \sin \beta k$	$\frac{aZ(Z^2 - a^2) \sin \beta}{[Z^2 - 2aZ \cos \beta + a^2]^2}$
33	$a^k \operatorname{ch} \beta k$	$\frac{Z(Z - a \operatorname{ch} \beta)}{Z^2 - 2aZ \operatorname{ch} \beta + a^2}$
34	$a^k \operatorname{sh} \beta k$	$\frac{aZ \operatorname{sh} \beta}{Z^2 - 2aZ \operatorname{ch} \beta + a^2}$
35	$\frac{1}{k} a^k, k > 0$	$\ln \frac{Z}{Z - a}$
36	$\frac{1}{k!} a^k$	$e^{a/Z}$
37	$\frac{1}{k!} (\ln a)^k$	$\frac{1}{e^Z}$
38	$\frac{1}{(2k)!}$	$\operatorname{ch} \sqrt{\frac{1}{Z}}$
39	$\frac{1}{k+1}$	$Z \ln \frac{Z}{Z+1}$
40	$\frac{1}{2k+1}$	$\sqrt{Z} \operatorname{arctan} \sqrt{\frac{1}{Z}}$

5.3.4 逆Z变换

逆Z变换的方法主要有三种，即幂级数展开法、部分分式法和反演积分法。

1) 幂级数展开法 若已知 $F(Z) = B(Z)/A(Z)$ ，可利用多项式长除法将 $F(Z)$ 表示成 Z 的幂级数形式。幂级数的系数即 $f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(Z)]$ 相应项的数值。

2) 部分分式法 若 $F(Z)$ 是 Z 的有理函数，且有 n 个单极点 $r_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，则由部分分式法可得：

$$F(Z) = Z \left[\frac{C_0}{Z} + \frac{C_1}{Z - r_1} + \dots + \frac{C_n}{Z - r_n} \right] \quad (2.3-34)$$

式中 系数 $C_i = [(Z - r_i) F(Z)/Z] |_{z=r_i}$ (2.3-35)

从而可得：

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathcal{Z}^{-1}[F(Z)] \\ &= C_0 \delta(k) + C_1 r_1^k + \dots + C_n r_n^k, \\ &\quad (k \geq 0) \end{aligned} \quad (2.3-36)$$

如果 $F(Z)$ 有重极点，如 $Z = r_1$ 为 m 阶重极点 ($m < n$)，其余极点为单极点，用部分分式法得：

$$\begin{aligned} F(Z) &= C_0 + \sum_{i=1}^m \frac{B_i Z}{(Z - r_1)^i} \\ &\quad + \sum_{j=m+1}^n \frac{C_j Z}{Z - r_j} \end{aligned} \quad (2.3-37)$$

式中 $B_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 为重极点的系数，即

$$B_i = \frac{1}{(m-i)!} \left[\frac{d^{m-i}}{dZ^{m-i}} (Z - r_1)^m \frac{F(Z)}{Z} \right]_{Z=r_1} \quad (2.3-38)$$

$C_j (j = m+1, m+2, \dots, n)$ 为单极点的系数，由式 (2.3-35) 计算。将所计算出的 B_i 、 C_j 代入式 (2.3-37)，再求反变换即得到相应的 $f(k)$ 。

3) 反演积分法 参见参考文献[2]第八章。

5.4 离散系统的Z域分析

5.4.1 系统函数的定义

系统零状态响应的象函数 $Y_f(Z)$ 与激励象函数 $F(Z)$ 之比称为系统函数，用 $H(Z)$ 表示，即

$$H(Z) = \frac{Y_f(Z)}{F(Z)} = \frac{B(Z)}{A(Z)} \quad (2.3-39)$$

式中的 $A(Z)$ 和 $B(Z)$ 很容易由差分方程式直接写

出，因而由描述系统的差分方程很容易写出该系统的系统函数。

方程式 $A(Z) = 0$ 称为特征方程，它的根称为特征根。

若系统的单位函数响应为 $h(k)$ ，则 $H(Z) = \mathcal{Z}[h(k)]$ 或 $h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(Z)]$ 即系统的单位响应 $h(k)$ 与系统函数 $H(Z)$ 是 $-Z$ 变换对。这就提供了求系统的单位响应的一种较简便实用的方法。

5.4.2 Z域分析

若系统函数为 $H(Z)$ ，且有 n 个单极点 $r_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，则系统的零输入响应

$$y_z(k) = \sum_{i=1}^n C_i r_i^k \quad (2.3-40)$$

其中系数 C_i 由系统的初始状态确定。

如果系统的初始状态为零，输入序列为 $f(k)$ ，则系统的零状态响应为

$$y_f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(Z)F(Z)] = h(k) * f(k) \quad (2.3-41)$$

对于线性非时变系统，其完全响应 $y(k)$ 等于零输入响应与零状态响应的叠加，即

$$\begin{aligned} y(k) &= y_z(k) + y_f(k) \\ &= y_z(k) + \mathcal{Z}^{-1}[H(Z)F(Z)] \end{aligned} \quad (2.3-42)$$

还应指出，利用系统函数的零极点在 Z 平面上的分布来揭示系统的性质，在系统理论中是很重要的分析方法，可查阅参考文献[2] P.108~129。

6 系统的模拟与稳定性

系统的功能可以用数学式表征，也可以用信号流图或模拟框图来描述。若把系统定义为将输入集合 F 至输出集合 Y 的变换，则系统的模拟就是实现这种变换的物理途径之一。

系统的稳定性是个很重要的概念。现概括介绍几种判别系统稳定性的方法。

6.1 线性系统的信号流图表示与模拟

6.1.1 信号流图及其化简规则

1) 信号流图 信号流图是表示线性方程组的图形。它是由点、线连接成的描述系统内部各个变量之间的因果关系的有向图，图中的每个节点对应着系统的某个变量或常量，图中的边表示着它所连接的两个节点所对应的变量之间的变换关系。

2) 信号流图的基本性质

(1) 信号只能沿支路箭头方向传输, 支路的输出是该支路的输入与支路增益的乘积。

(2) 当节点有若干输入时, 节点将所有输入支路的信号相加, 并将其和传送给所有与该节相连的输出支路。如图 2-3-6 所示, $x_4 = H_{14}x_1 + H_{24}x_2 + H_{34}x_3$, 而且 $x_5 = H_{45}x_4$, $x_6 = H_{46}x_4$ 。

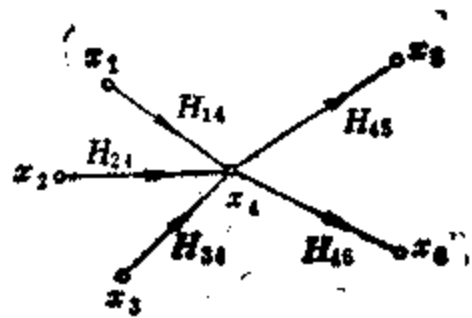


图2-3-6 信号流图实例

3) 信号流图化简的基本规则 信号流图所描述的既然是代数方程或方程组, 因而信号流图能按代数规则进行化简。信号流图化简的基本规则是:

(1) 两条增益分别为 a 和 b 的支路相串联, 可以合并为一条增益为 ab 的支路, 同时消去中间的节点, 如图 2-3-7 a 所示。

(2) 两条增益分别为 a 和 b 的支路相并联, 可以合并为一条增益为 $a + b$ 的支路, 如图 2-3-7 b 所示。

(3) 一条 x_1, x_2, x_3 的通路, 如果 x_1, x_2 支路的增益为 a , x_2, x_3 的增益为 c , 在 x_2 处有自环其增益为 b , 则可化简成增益为 $ac/(1 - b)$ 的支路, 同时消去节点 x_2 。如图 2-3-7 c 所示。

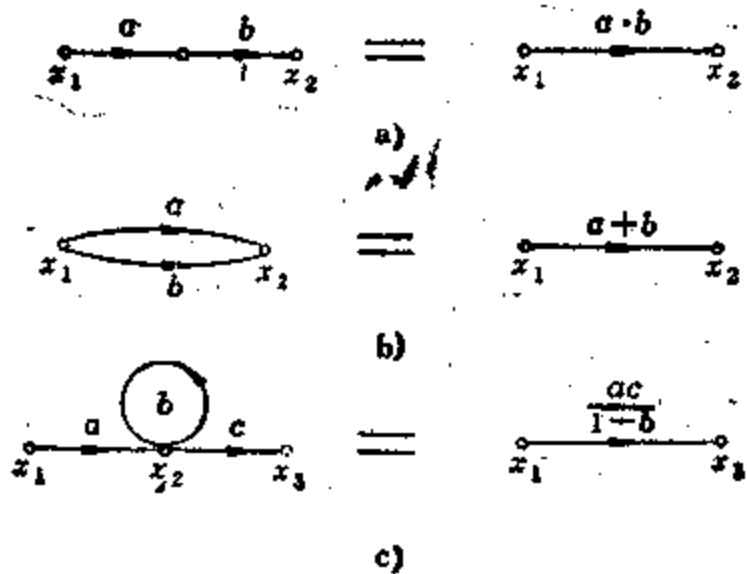


图2-3-7 信号流图化简规则

a) 串联支路的合并 b) 并联支路的合并
c) 自环的消除

利用以上的化简规则, 可将较复杂的信号流图化简为只有一个输入节点、一个输出节点和一条支路的信号流图, 从而求得系统函数。

6.1.2 梅森公式

梅森 (Mason) 公式是根据信号流图通过观察计算系统函数的通用公式。

梅森公式为:

$$H = \frac{1}{\Delta} \sum_i P_i \Delta_i \quad (2-3-43)$$

式中 H 表示系统函数;

Δ 称为信号流图的特征行列式, 并且

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - \sum_a L_a + \sum_{b, c} L_b L_c \\ & - \sum_{d, e, f} L_d L_e L_f \\ & + \dots + (-1)^j \sum_m P_{mj} \quad (2-3-43a) \end{aligned}$$

式(2-3-43 a)中 $\sum_a L_a =$ 所有不同的单回路传递函数 (每个单回路中各支路增益乘积) 之和;

$\sum_{b, c} L_b L_c =$ 所有两个互不接触 (无公共节点或边) 回路传递函数乘积之和;

$\sum_{d, e, f} L_d L_e L_f =$ 所有三个互不接触回路传递函数乘积之和;

$(-1)^j \sum_m P_{mj} =$ 所有 j 个互不接触回路传递函数乘积之和。

i 是由输入节点到输出节点的第 i 条前向通路的标号;

P_i 是由输入节点到输出节点的第 i 条前向通路的传递函数;

Δ_i 称为第 i 条前向通路特征行列式的余因子, 它是将第 i 条前向通路从流图中除掉 (包括该通路的所有节点和支路) 后所余子图的特征行列式。

6.1.3 连续系统的基本模拟单元

模拟是对实际系统某种功能的物理逼近 (也称仿真), 模拟系统与实际系统之间可能有完全不同的物理结构, 只是两者具有相同的输入、输出关系。模拟系统是由积分器、加法器以及乘法器等基本模

表2-3-13 基本模拟单元符号

名称	时域符号	s域符号
积分器		
加法器		
乘法器		

拟单元连接而成[由于微分器往往会使得干扰(或噪声)增强,故不用此种模拟单元]。表2-3-13给出了常用模拟单元的符号,其中s域的模拟单元为零初始状态。

6.1.4 系统模拟

对于同一个系统函数H(s),其模拟系统的方案主要有直接形式、级联形式和并联形式。

1) 直接形式 若系统函数(式中m ≤ n)

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$= \frac{b_m s^{-(n-m)} + b_{m-1} s^{-(n-m+1)} + \dots + b_1 s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{-(n-1)} + a_0 s^{-n}} \quad (2-3-44)$$

根据梅森公式,式(2-3-44)的分母可看作是n个回路组成的特征行列式,而且各回路都互相接触,分子可看作是(m+1)条前向通路的传递函数,而且各前向通路都没有不接触回路。这样,就得到图2-3-8 a、b两种直接模拟的信号流图。

2) 级联形式 级联形式也称为串联形式。将式(2-3-44)右边分子与分母多项式分解成因式形

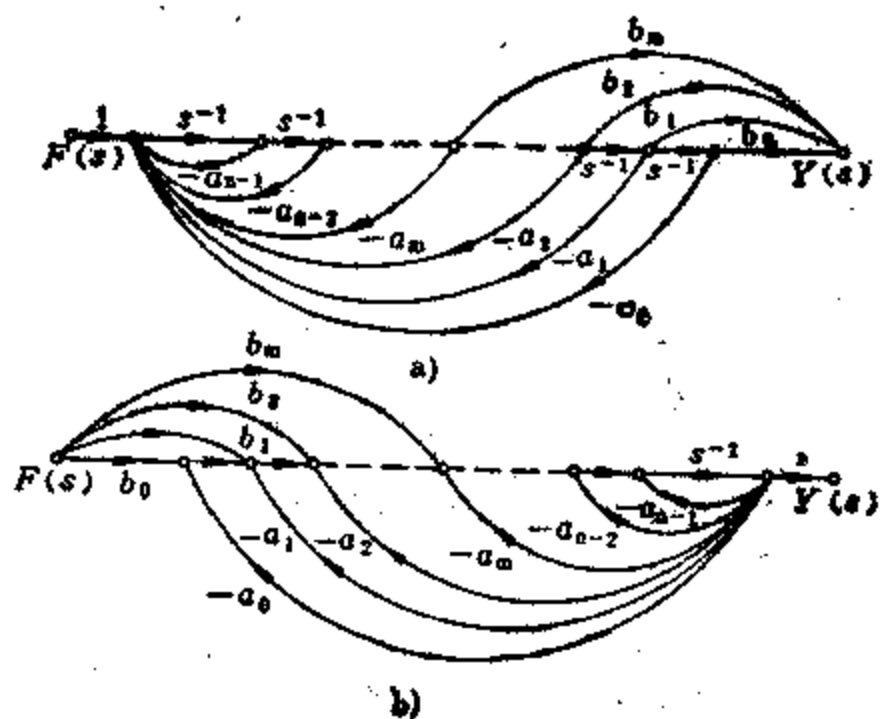


图2-3-8 式(2-3-44)的信号流图表示

式,则有

$$H(s) = b_m H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot \dots \cdot H_n(s) \quad (2-3-45)$$

式中 $H_i(s) = (s - z_i)/(s - p_i)$

$$= \left(1 - \frac{z_i}{s}\right) / \left(1 - \frac{p_i}{s}\right),$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

根据梅森公式可得 $H_i(s)$ 的模拟信号流图, 然后将它们级联即得到式 (2.3-45) 系统的模拟信号流图。

例如, 若系统的传递函数

$$H(s) = 2(s + 1)/(s^2 + 7s^2 + 10s)$$

$$= \frac{2}{s} \cdot \frac{1 + \frac{1}{s}}{1 + \frac{2}{s}} \cdot \frac{1}{s} \quad (2.3-46)$$

其级联形式模拟图如图 2.3-9 所示。

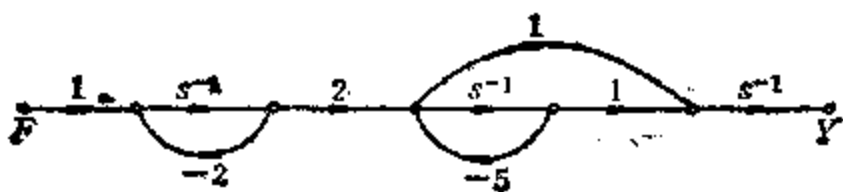


图 2.3-9 式 (2.3-46) 的级联信号流图

3) 并联形式 用部分分式法, 可将式 (2.3-44) 分解为几个简单转移函数与一常数 b_m 之和, 即

$$H(s) = b_m + \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} \quad (2.3-47)$$

其中每一项可用梅森公式得出相应的模拟信号流图, 然后把它们并联起来, 就得到整个系统的模拟信号流图。例如, 式 (2.3-46) 所对应的系统, 可表示为

$$H(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{8}{s+5} \quad (2.3-48)$$

其并联模拟信号流图如图 2.3-10 所示。

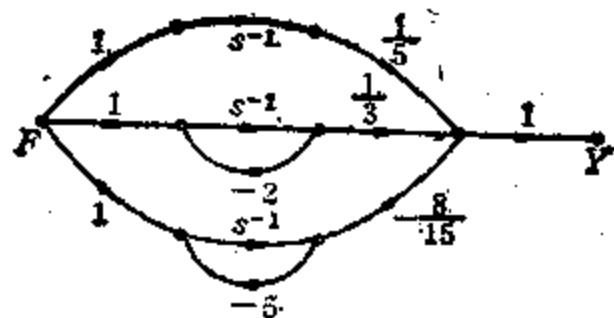


图 2.3-10 并联模拟信号流图

6.1.5 离散系统的模拟

在以上连续系统的模拟中, 若将复变量 s 换成 Z , 那么逐字逐句的重复以上的论述, 就是对离散系统 $H(Z)$ 的模拟, 不再重复。

6.2 连续系统的稳定性

6.2.1 线性系统的稳定性

1) 稳定系统 一个系统, 如果对任意的有界输入, 其零状态响应也是有界的, 则称该系统为有界输入有界输出 (BIBO) 稳定。

该定义意味着, 对所有的

$$|f(t)| \leq M_f$$

其响应

$$|y_f(t)| \leq M_f$$

则称该系统是 (BIBO) 稳定的。式中 M_f, M_y 是有界正常数。

2) 系统稳定的充要条件 若系统的冲激响应为 $h(t)$, 而 M 为有界正常数, 则系统具有 BIBO 稳定性的充分和必要条件为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq M \quad (2.3-49)$$

满足该条件的系统也称为外部稳定系统。换句话说, 若冲激响应 $h(t)$ 是绝对可积的, 则系统是外部稳定的。

3) 系统内部稳定的充要条件 若系统传递函数 $H(s)$ (假设已知其分子与分母之间没有公因式相消) 的所有极点均在左半 s 开平面, 则该系统必然为内部稳定的。换句话说, 若系统的固有频率为 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $Re[\lambda_i] < 0$ 是系统内部稳定的充分必要条件。

应当指出, 凡是内部稳定的系统也必然是外部稳定的; 反之, 具有外部稳定性的系统却未必是内部稳定的。

6.2.2 系统的可控性与可观测性

可控性与可观测性是线性系统的理论基础之一, 也是线性系统的两个基本问题。系统的可控性反映着输入对系统状态的控制能力, 而可观测性反映着系统状态对输出的影响能力。粗略地讲, 对于一个线性非时变系统, 如果输入能够激发出系统的所有固有频率 (即在输出中存在着所有固有频率的对应项), 就称它是可控的; 如果其输入为零, 在零输入响应中它的全部固有频率项在输出中都可以观察到, 则称为可观测的。

系统函数与冲激响应只有对可控又可观测的系

统才能描述其性质。对于单输入单输出系统，只有当相应的系统函数 $H(s)$ 的分子与分母没有公因式相消时，它才具有可控性与可观测性。本章后面的讨论，均假定系统是同时具有可控性与可观测性的。

6.2.3 罗斯 (Routh) 准则 (判据)

如果系统的传递函数为 $H(s) = B(s)/A(s)$ ，而 $A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ ，则该系统稳定的必要条件是：多项式 $A(s)$ 的所有系数 a_i 必须都是正的，且都不为零（或多项式无缺项），即

$$a_i > 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

若以上必要条件成立，则可用罗斯准则判定系统稳定性。

首先根据多项式 $A(s)$ 的系数构成罗斯阵列，见表 2.3-14。

表 2.3-14 中第 1、2 两行的元素是多项式 $A(s)$ 的系数。第 3 行以后各行的元素按以下规则计算：

$$C_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$C_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

⋮

$$d_{n-1} = \frac{-1}{C_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ C_{n-1} & C_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$d_{n-2} = \frac{-1}{C_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ C_{n-1} & C_{n-5} \end{vmatrix}$$

⋮

依此类推，直排到第 $n+1$ 行为止（以后各行为零）。

表 2.3-14 根据多项式 $A(s)$ 的系数构成的罗斯阵列

列 \ 行	1	2	3	0
s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	0
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	0
s^{n-2}	C_{n-1}	C_{n-3}	C_{n-5}	0
s^{n-3}	d_{n-1}	d_{n-3}	d_{n-5}	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
s	h_{n-1}	h_{n-3}	0	0	...	0
s^0	m	0	0	0	...	0

在排阵列过程中，任何一行的系数可以同乘（或同除）以某正数而不会改变判别结果。

罗斯阵列中的第 1 列元素 $a_n, a_{n-1}, C_{n-1}, d_{n-1}, \dots, h_{n-1}, m$ 称为罗斯数列。

罗斯定理 顺次计算罗斯数列元素符号变换的次数，即为 $A(s) = 0$ 正实部根的个数。

若 $A(s)$ 有正实部根，则系统不稳定；若只有负实部根，则系统稳定；若除负实部根外，在 $j\omega$ 轴上有单根时，系统为临界稳定。

排罗斯阵列时会遇到某些特殊情况，请参阅参考文献 [4]。

6.2.4 奈奎斯特 (Nyquist) 判据

该判据是以复变函数论中的围线映射原理为理论基础提出的，主要用于闭环（或反馈）系统稳定性判断。需要时，请参阅参考文献 [1] 第七章。

6.3 离散系统的稳定性

6.3.1 稳定条件

线性时不变离散系统稳定的充分和必要条件是：其系统函数 $H(Z)$ 的极点都位于 Z 平面的单位圆内部。

为要判别离散系统是否稳定，就需要判别系统函数

$$H(Z) = \frac{B(Z)}{A(Z)}$$

的特征方程 $A(Z) = 0$ 所有根的绝对值是否都小于 1。

6.3.2 朱利判别法

朱利 (Jury) 判别法可用多项式 $A(Z)$ 的系数检验 $A(Z) = 0$ 的根是否全部在单位圆内。

首先说明朱利表的列写方法。假设：

表2-3-15 朱利表

列 \ 行	1	2	3	...	(n-1)	n	n+1
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	C_{n-1}	C_{n-2}	C_{n-3}	...	C_1	C_0	
4	C_0	C_1	C_2	...	C_{n-2}	C_{n-1}	
5	d_{n-2}	d_{n-3}	d_{n-4}	...	d_0		
6	d_0	d_1	d_2	...	d_{n-2}		
...				
$2n-3$	x_2	x_1	x_0				

$$A(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0 \quad (2-3-50)$$

利用式(2-3-50)可得到朱利表(见表2-3-15)。表2-3-15中第1行列出 $A(Z)$ 的系数,第2行也是 $A(Z)$ 的系数但按反序排列。第3行的元素由1、2行的元素按下述方法得出:

$$C_{n-1} = \begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$C_{n-2} = \begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$C_{n-3} = \begin{vmatrix} a_n & a_2 \\ a_0 & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

...

第4行是将第3行的各系数反序排列。由第3、4两行再用上述相同方法求得第5行:

$$d_{n-2} = \begin{vmatrix} C_{n-1} & C_0 \\ C_0 & C_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$d_{n-3} = \begin{vmatrix} C_{n-1} & C_1 \\ C_0 & C_{n-2} \end{vmatrix}$$

...

第6行是将第5行的各系数反序排列。按照同样的规律排列其后各行,直到 $2n-3$ 行为止。可以看出,每两行总比其上的两行元素少一项。

朱利判别法指出, $A(Z)$ 的所有根都位于 Z 平面单位圆内的充分和必要条件是:

$$\left. \begin{aligned} A(Z)|_{Z=1} = A(1) > 0 \\ (-1)^n A(-1) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-3-51)$$

再观察所有的奇数行,每一奇数行的第一个元素必须大于它最后一个元素的绝对值,即

$$\left. \begin{aligned} a_n &> |a_0| \\ C_{n-1} &> |C_0| \\ d_{n-2} &> |d_0| \\ &\vdots \\ x_2 &> |x_0| \end{aligned} \right\} \quad (2-3-52)$$

若式(2-3-51)和式(2-3-52)都满足,则 $A(Z)$ 的所有零点都全部在 Z 平面单位圆内,系统稳定;否则,系统不稳定。

参 考 文 献

- 1 杨诚明编。电磁场的基本物理量E、D、B、H。北京:人民出版社,1982
- 2 陈家霖编。电磁学。上海:上海科技文献出版社,1985
- 3 俞大光编。电工基础(修订本)上、中、下册。北京:高等教育出版社,1965
- 4 冯慈璋主编。电磁场。北京:高等教育出版社,1983
- 5 机械工程手册、电机工程手册编辑委员会。电气工程师手册。北京:机械工业出版社,1987
- 6 李瀚荪编。电路分析基础。第二版,北京:高等教育出版社,1985
- 7 邱关源主编。电路。北京:人民教育出版社,1985

-
- 1978
- 8 管致中等编。电路、信号与系统。北京：人民教育出版社，1979
- 9 吴大正主编。信号与线性系统分析。北京：高等教育出版社，1986
- 10 郑君里等编。信号与系统。北京：人民教育出版社，1981
- 11 北京师范大学出版社编。电子与信息科学基础课程手册。北京：北京师范大学出版社，1983
- 12 郑钧著。线性系统分析。毛培法译。北京：科学出版社，1978

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 电子工程师手册 上册 第2篇 电磁学与电路基础

作者 =

页数 = 103

SS号 = 0

出版日期 =

书名
目录
正文