第1篇 常用资料

主　编　　丁润涛
执　笔　　韩庆奎
主　审　　罗命钧

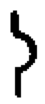
目　录

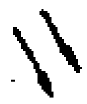
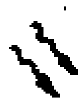
第1章 符号与常数

1 电子与电气技术中常用图形符号

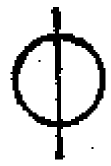
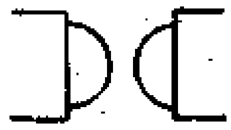
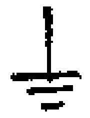
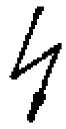
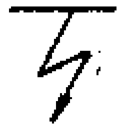
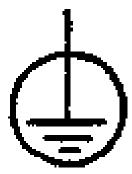
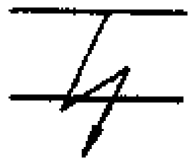
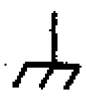
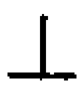
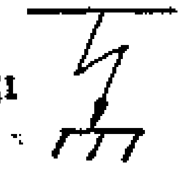
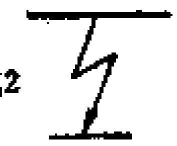
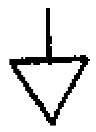
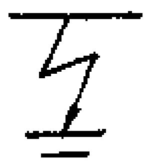
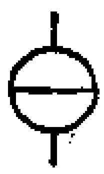
1·1 限定符号和常用的其他符号(见表1·1-1)

表1·1-1 限定符号和常用的其他符号（GB4728.2—84）

图形符号	说明
— 或 ⎓	直流
～	交流 低频（工频或亚音频）
≈	中频（音频）
≋	高频（超音频、载频或射频）
	交直流
N	中性（中性线）
M	中间线
+	正极
-	负极
	热效应
	电磁效应
	磁滞伸缩效应
×	磁场效应或磁场相关性

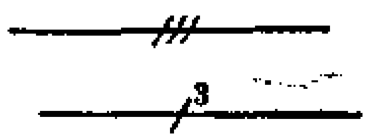
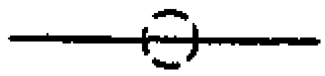
图形符号	说明
	延时 延迟
	非电离的电磁辐射 注：如无线电波或可见光
	非电离的相干辐射 注：如相干光
	电离辐射 注：如果必须表示电离辐射的具体类型可以加注下列字母以补充符号内容 α　α粒子 β　β粒子 γ　γ射线 δ　氘 p　质子 n　中子 π　π介子 κ　κ介子 μ　μ介子 x　x射线
	正脉冲
	负脉冲
	交流脉冲
	正阶跃函数
	负阶跃函数

（续）

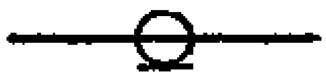
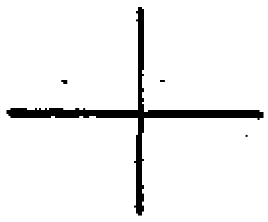
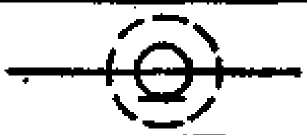
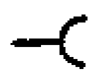
图形符号	说明	图形符号	说明
	锯齿波		理想电压源
	键盘		
	传真		理想回转器
	接地一般符号		故障（用以表示假定故障位置）
	无噪声接地（抗干扰接地）		闪络、击穿
	保护接地		导线间绝缘击穿
形式1  形式2 	接机壳或接底板	形式1  形式2 	导线对机壳绝缘击穿
	等电位		导线对地绝缘击穿
	理想电流源		永久磁铁

1·2 导线和连接器件(见表1·1-2)

表1·1-2 导线和连接器件（GB4728.3—84）

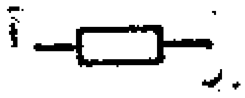
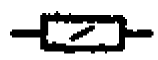
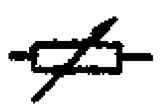
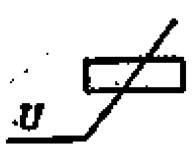
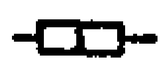
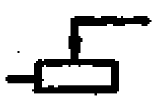
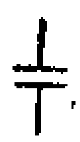
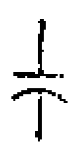
图形符号	说明	图形符号	说明
	导线、电缆、线路和母线（总线）一般符号		柔软导线，软波导
	三根导线的单线表示		屏蔽导线

（续）

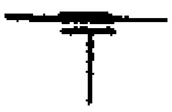
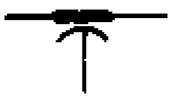
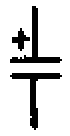
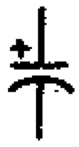
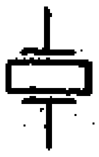
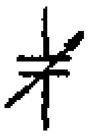
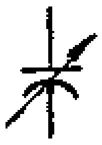
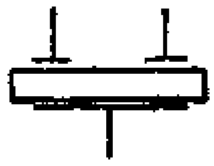
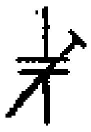
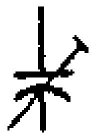
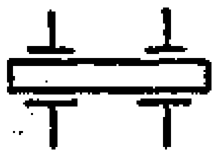
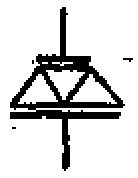
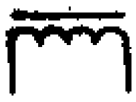
图形符号	说明	图形符号	说明
	同轴对、同轴电缆		导线的跨越
	屏蔽同轴对、屏蔽同轴电缆		导线直接连接 导线接头
	未连接的导线或电缆	优选型  其他型 	插座（内孔的）或插座的一个极
	未连接的特殊绝缘的导线或电缆	 	插头（凸头的）或插头的一个极
	端子 注：必要时圆圈可画成圆黑点	 	插头和插座（凸头和内孔的）
形式1  形式2 	导线的连接		
	可拆卸的端子		

1·3 无源元件（见表1·1-3）

表1·1-3 无源元件（GB4728.4—85）

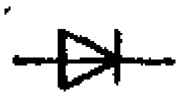
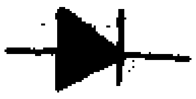
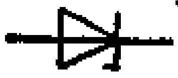
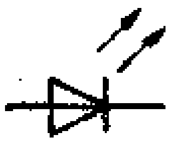
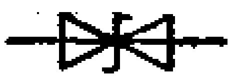
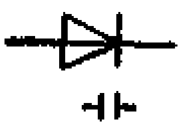
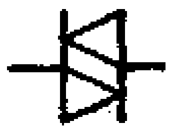
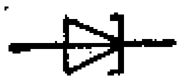
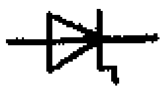
图形符号	说明	图形符号	说明
优选型  其他型 	电阻器一般符号		0.25W电阻器
	可调电阻器 可变电阻器		0.5W电阻器
	压敏电阻器 变阻器 注：U可以用V代替		1W电阻器 注：大于1W电阻器都用阿拉伯数字表示
	热敏电阻器 注：θ可以用$t°$代替		滑线式变阻器
	0.125W电阻器	优选型  其他型 	电容器一般符号

（续）

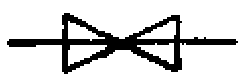
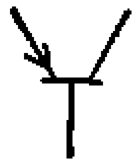
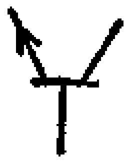
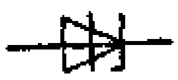
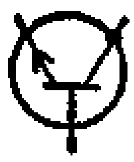
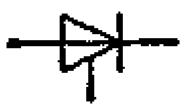
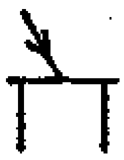
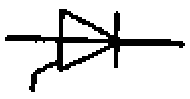
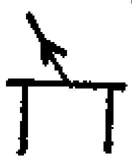
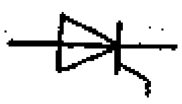
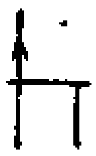
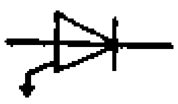
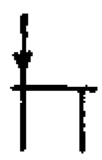
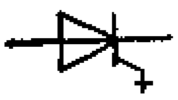
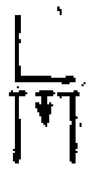
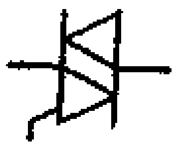
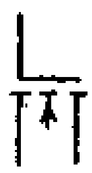
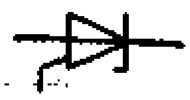
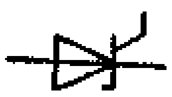
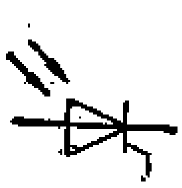
图形符号		说明	图形符号	说明
优选型	其他型	穿心电容器		带磁心连续可调的电感器
				可变电感器
		极性电容器		具有两个电极的压电晶体
		可变电容器 可调电容器		具有三个电极的压电晶体
		微调电容器		具有两对电极的压电晶体
		电感器、线圈、绕组、扼流圈		具有电极和连接的驻极体 注：较长的线表示正极
		带磁心的电感器		
		磁心有间隙的电感器		

1·4 半导体管和电子管(见表1·1-4)

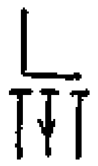
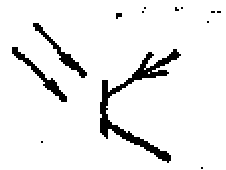
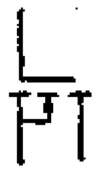
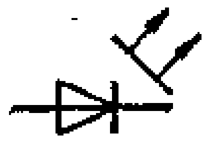
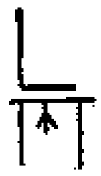
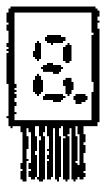
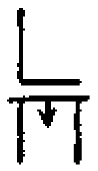
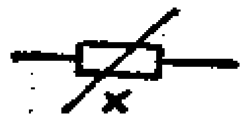
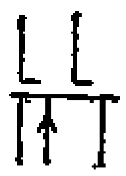
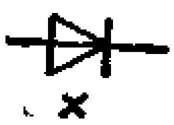
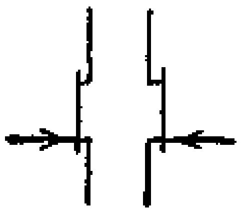
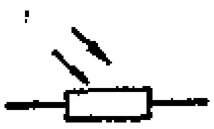
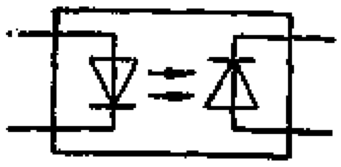
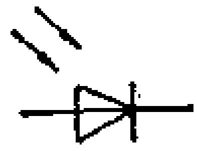
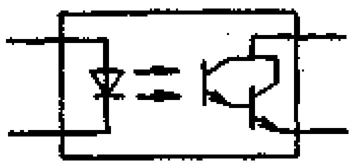
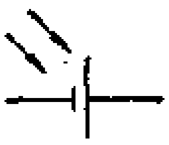
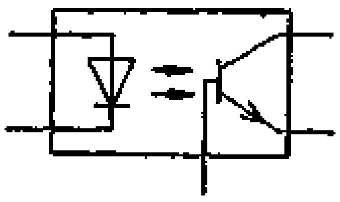
表1·1-4 半导体管和电子管（GB4728.5—85）

图形符号		说明	图形符号	说明
优选形 	其他形 	半导体二极管一般符号		单向击穿二极管 电压调整二极管 江崎二极管 稳压管
		发光二极管一般符号		双向击穿二极管
				反向二极管（单隧道二极管）
		变容二极管		双向二极管 交流开关二极管
		隧道二极管		阶跃恢复二极管

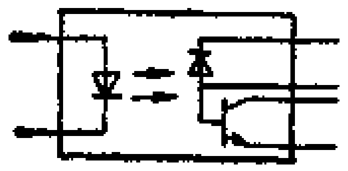
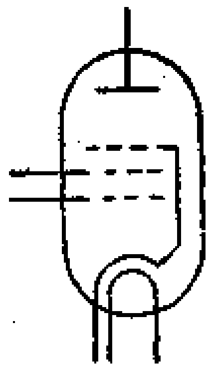
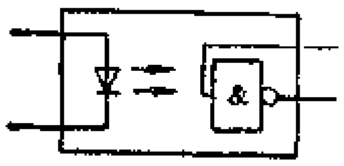
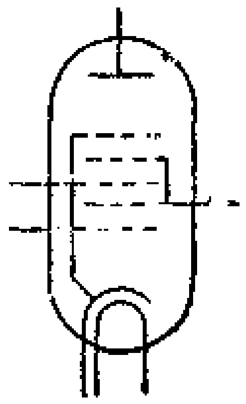
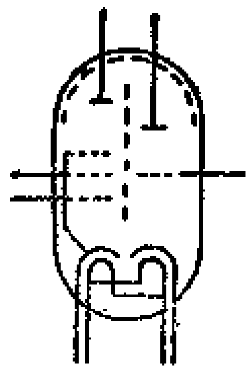
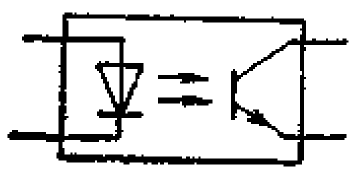
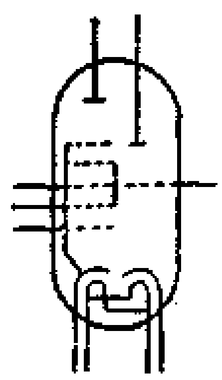
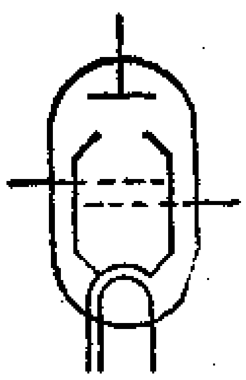
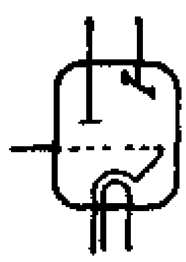
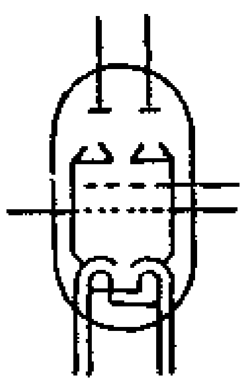
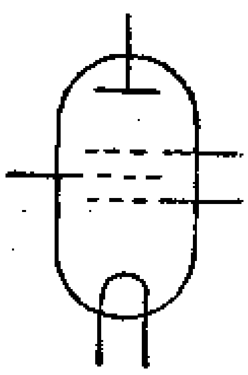
（续）

图形符号	说明	图形符号	说明
	体效应二极管		PNP型半导体管
	反向阻断二极晶体闸流管		NPN型半导体管
	反向导通二极晶体闸流管		NPN型半导体管，集电极接管壳
	三极晶体闸流管 注：当没有必要规定控制极的类型时，这个符号用于表示反向阻断三极晶体闸流管 晶体闸流管简称晶闸管（一般用简称多）		具有N型双基极单结型半导体管
	反向阻断三极晶体闸流管，N型控制极（阳极侧受控）		具有P型双基极单结型半导体管
	反向阻断三极晶体闸流管，P型控制极（阴极侧受控）		P型沟道结型场效应半导体管
	可关断三极晶体闸流管，N型控制极（阳极侧受控）		N型沟道结型场效应半导体管
	可关断三极晶体闸流管，P型控制极（阴极侧受控）		增强型、单栅、P沟道和衬底无引出线的绝缘栅场效应半导体管
	双向三极晶体闸流管 三端双向晶体闸流管		增强型、单栅、N沟道和衬底无引出线的绝缘栅场效应半导体管
	反向导通三极晶体闸流管，N型控制极（阳极侧受控）		
	反向导通三极晶体闸流管，P型控制极（阴极侧受控）		
	光控晶体闸流管		

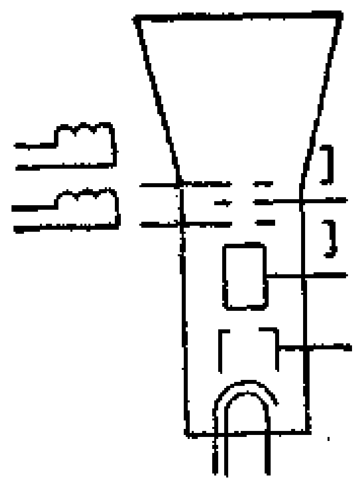
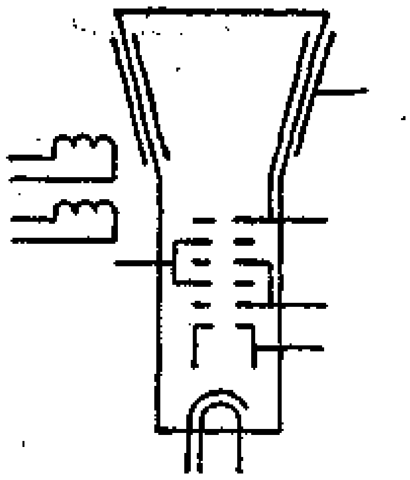
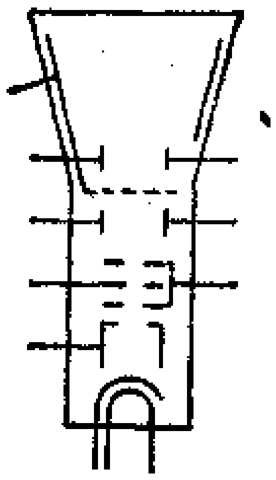
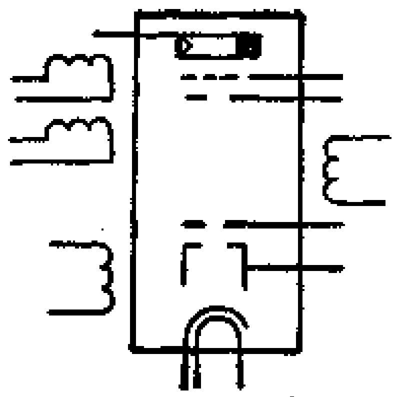
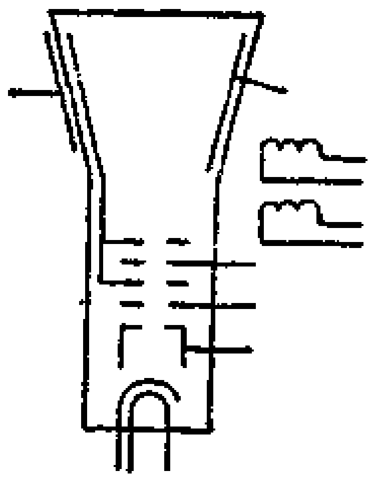
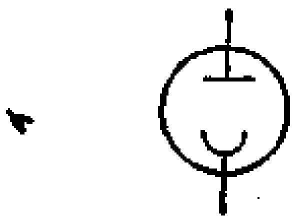
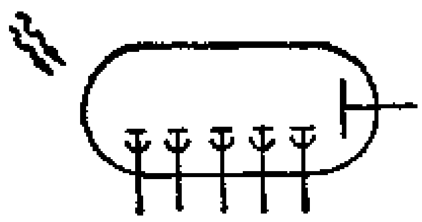
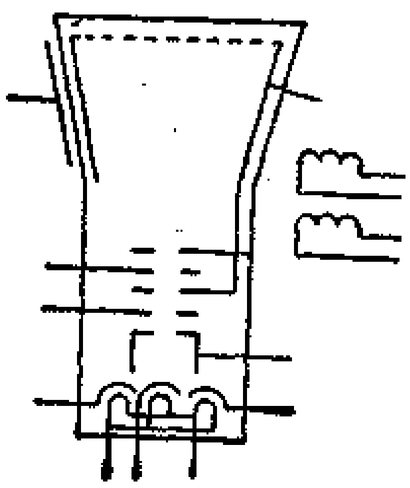
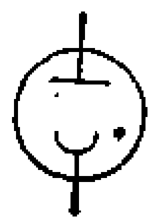
（续）

图形符号	说明	图形符号	说明
	增强型、单栅、P沟道和衬底有引出线的绝缘栅场效应半导体管		光电半导体管（示出PNP型）
	增强型、单栅、N沟道和衬底与源极在内部连接的绝缘栅场效应半导体管		半导体激光器
	耗尽型、单栅、N沟道和衬底无引出线的绝缘栅场效应半导体管		发光数码管
	耗尽型、单栅、P沟道和衬底无引出线的绝缘栅场效应半导体管		磁敏电阻器（示出线性型）
	耗尽型、双栅、N沟道和衬底有引出线的绝缘栅场效应半导体管 注：在多栅的情况下，主栅极与源极的引线应在一条直线上		磁敏二极管
	N沟道结型场效应半导体对管		NPN型磁敏半导体管
	光敏电阻		光电二极管型光耦合器
	光电二极管		达林顿型光耦合器
	光电池		光电三极管型光耦合器

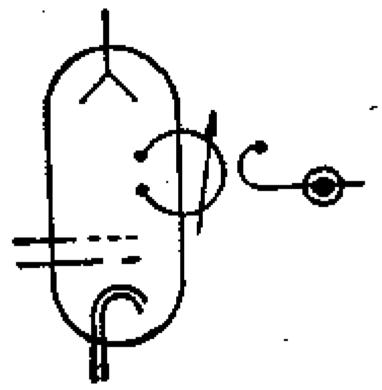
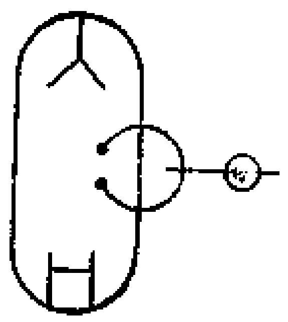
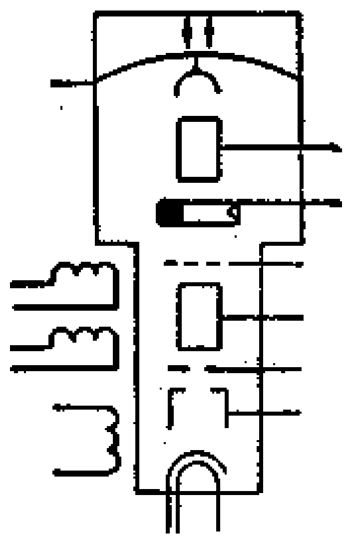
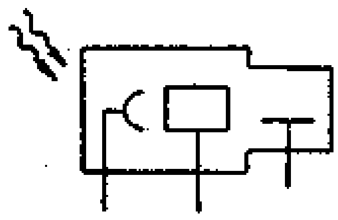
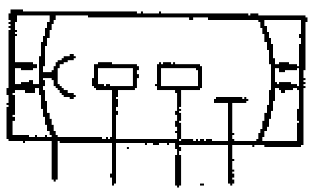
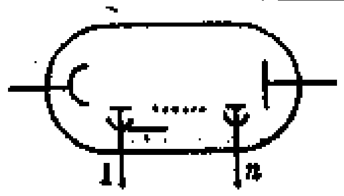
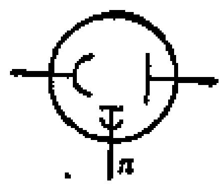
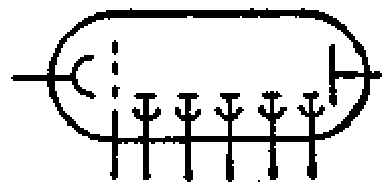
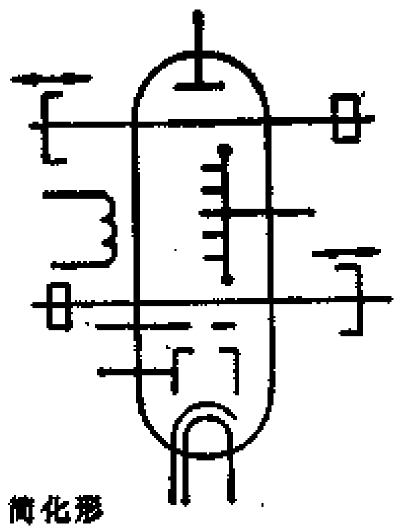
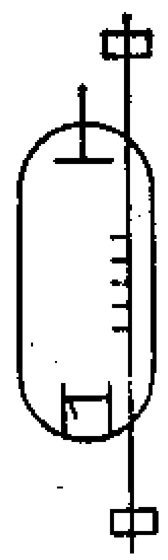
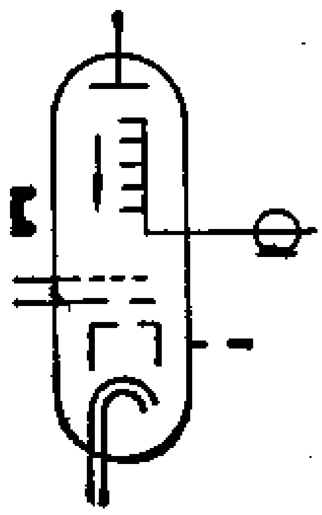
（续）

图形符号	说　明	图形符号	说　明
	光电二极管和半导体管（NPN型）光耦合器		间热式阴极五极管（抑制栅与阴极管内连接）
	集成电路光耦合器		间热式阴极七极管
	磁耦合器 磁隔离器		三极-五极管
	光耦合器 光隔离器 （示出发光二极管和光电半导体管）		三极-七极管
	束射四极管		间热式阴极调谐指示管（电眼管）
	双束射四极管		
	直热式阴极五极管		

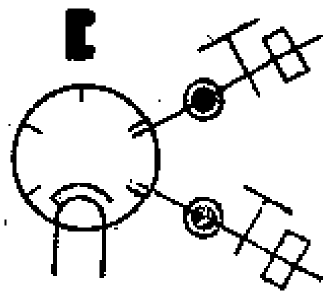
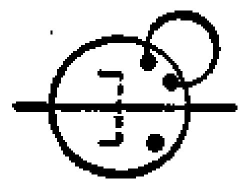
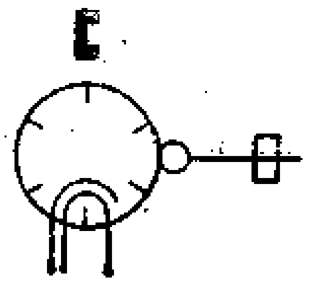
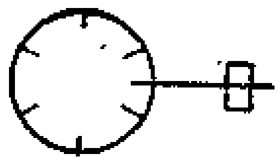
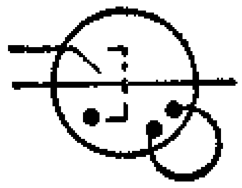
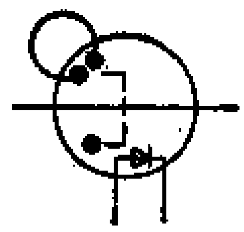
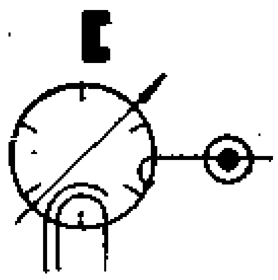
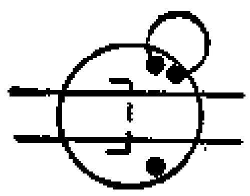
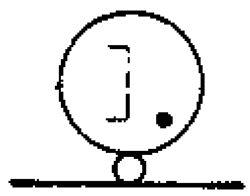
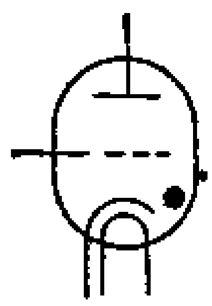
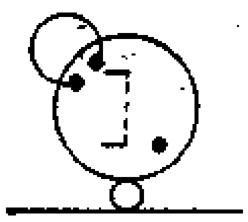
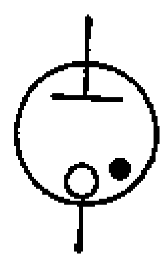
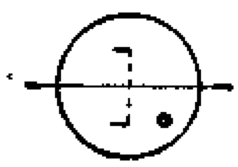
（续）

图形符号	说　明	图形符号	说　明
	电子束管 ——间热式阴极 ——调制极 ——电磁偏转 ——永磁聚焦		飞点扫描管
	示波管		视象管 光导型摄象管
	显象管		光电管
			电子倍增器
	单枪三束彩色显象管		充气光电管

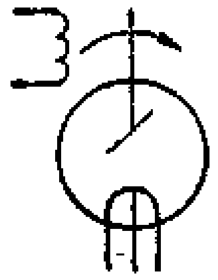
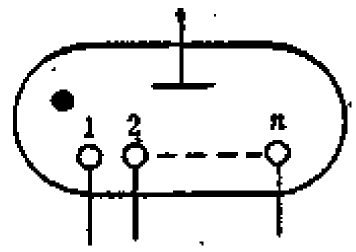
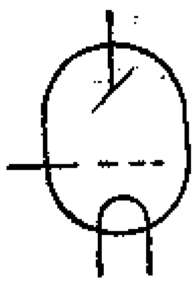
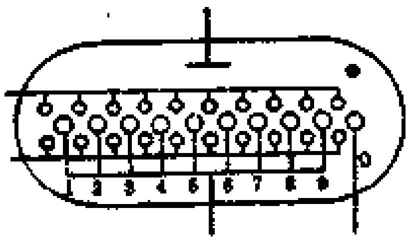
（续）

图形符号	说　明
 简化形 	反射速调管 ——间热式阴极 ——聚焦极 ——栅网 ——内腔可调 ——反射极 ——耦合环耦合，同轴输出
	微光摄象管
	象增强管
	微光变象管
 简化形 	光电倍增管 注：n 为倍增极级数
	栅控光电倍增管
 简化形 	行波管 ——间热式阴极 ——调制极 ——聚焦极 ——慢波结构 ——收集极 ——电磁聚焦 ——探针耦合、矩形波导输入、输出，且都有短路活塞
	"O"型返波管 ——间热式阴极 ——调制极 ——聚焦极 ——栅网 ——开式慢波结构 ——收集极 ——永磁聚焦 ——直接耦合，同轴线输出

（续）

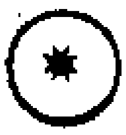
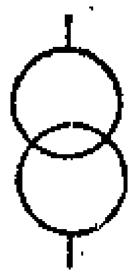
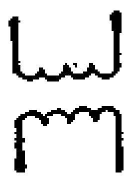
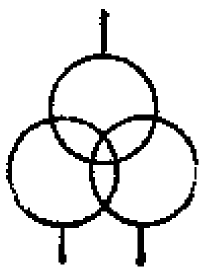
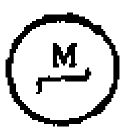
图形符号	说明	图形符号	说明
	“M”型返波放大管		串联谐振放电管
 简化形 	磁控管 ——间热式阴极 ——闭式慢波结构 ——永磁场 ——窗孔耦合，矩形波导输出		高品质因数（Q）谐振放电管
			半导体限幅器放电管
	可调磁控管		平衡式放电管
	并联非谐振放电管		闸流管 间热式阴极充气三极管
	并联谐振放电管		冷阴极充气二极管 充气稳压管
	串联非谐振放电管 保护放电管（TR管）		

（续）

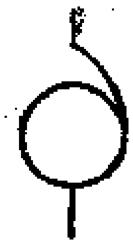
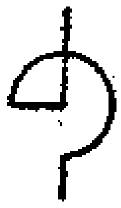
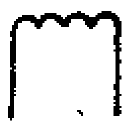
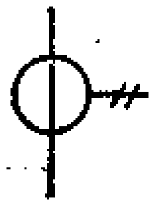
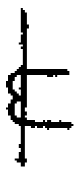
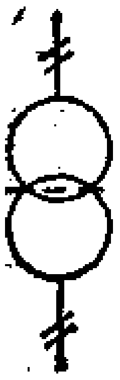
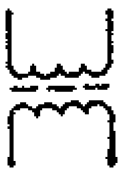
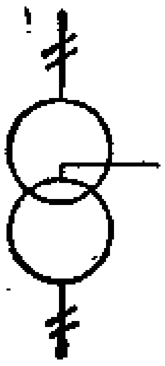
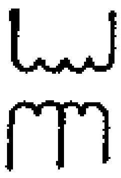
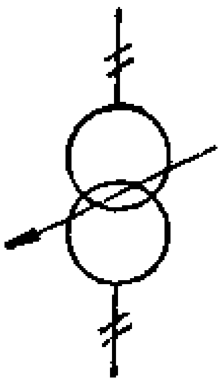
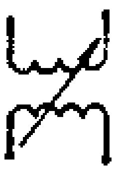
图形符号	说　明	图形符号	说　明
	旋转阳极X射线管		数字符号显示管 （多个冷阴极充气管） 计数管 注：所显示的字符可标注在其冷阴极的上方
	栅控X射线管		计数管 ——两组导向阳极 ——一组主阴极 ——个输出极

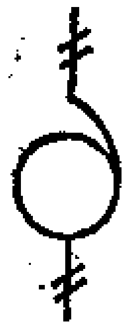
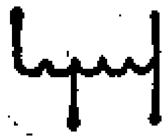
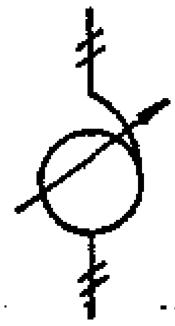
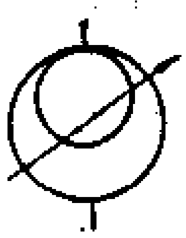
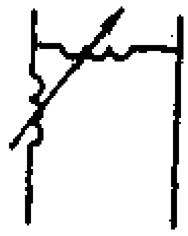
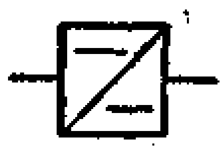
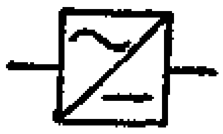
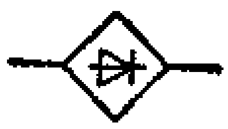
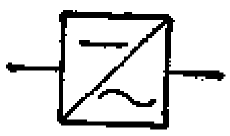
1·5　电能的发生和转换（见表1·1-5）

表1·1-5　电能的发生和转换（GB4728.6—84）

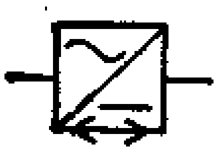
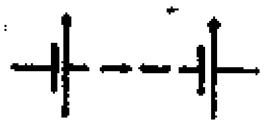
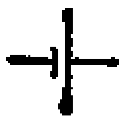
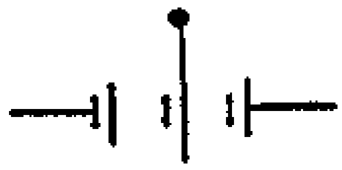
图形符号	说　明	图形符号	说　明
	电机一般符号 符号内的星号必须用下述字母代替： C　同步变流机 G　发电机 GS　同步发电机 M　电动机 MG　能作为发电机或电动机使用的电机 MS　同步电动机 SM　伺服电机 TG　测速发电机 TM　力矩电动机 IS　感应同步器		铁心
			带间隙的铁心
		形式1  形式2 	双绕组变压器 注：瞬时电压的极性可以在形式2中表示
	直线电动机一般符号	 	三绕组变压器
	步进电动机一般符号		

（续）

图形符号		说　明
形式1	形式2	
		自耦变压器
		电抗器、扼流圈
		电流互感器 脉冲变压器
		绕组间有屏蔽的双绕组单相变压器
		在一个绕组上有中心点抽头的变压器
		耦合可变的变压器

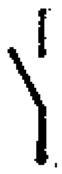
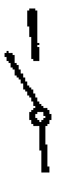
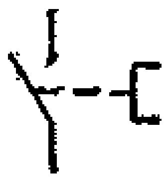
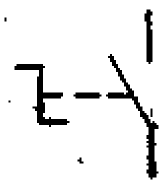
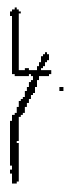
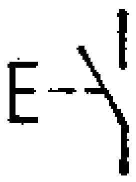
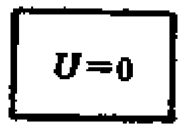
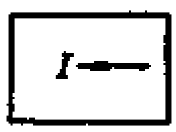
图形符号		说　明
形式1	形式2	
		单相自耦变压器
		可调压的单相自耦变压器
		单相感应调压器
		直流变流器
		整流器
		桥式全波整流器
		逆变器

（续）

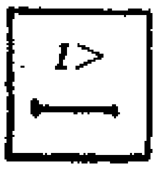
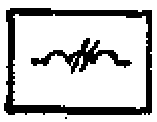
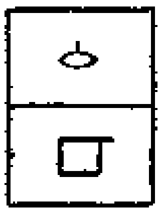
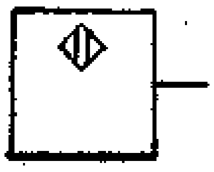
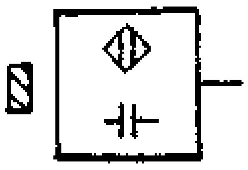
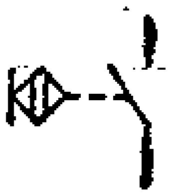
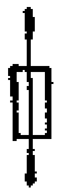
图形符号	说　明	图形符号	说　明
	整流器/逆变器	形式1  形式2 	原电池组或蓄电池组
	原电池或蓄电池		带抽头的原电池组或蓄电池组

1·6　开关、控制和保护装置(见表1·1-6)

表1·1-6　开关、控制和保护装置（GB4728.7—84）

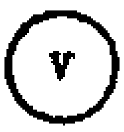
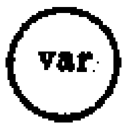
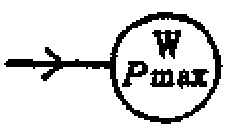
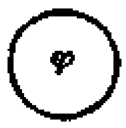
图形符号	说　明	图形符号	说　明
形式1  形式2 	动合（常开）触点 注：本符号也可以用作开关一般符号		拉拔开关（不闭锁）
			旋钮开关、旋转开关（闭锁）
	动断（常闭）触点		位置开关，动合触点 限制开关，动合触点
	手动开关的一般符号		位置开关，动断触点 限制开关，动断触点
	按钮开关（不闭锁）		零电压继电器
			逆流继电器

（续）

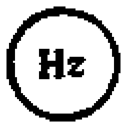
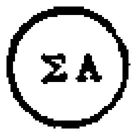
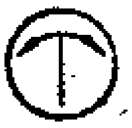
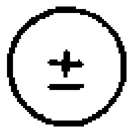
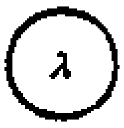
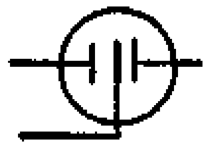
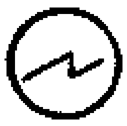
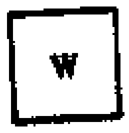
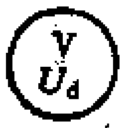
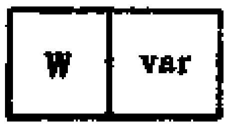
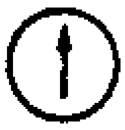
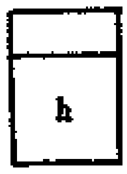
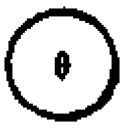
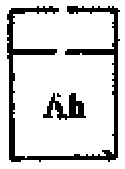
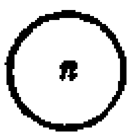
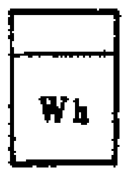
图形符号	说明
	欠功率继电器
	延时过流继电器
	匝间短路检测继电器
	断线检测继电器
	气体继电器
	接近传感器
	接近传感器件方框符号 注：操作方法可以表示出来
	示例：固体材料接近时操作的电容性的接近检测器
	接触传感器
	接触敏感开关动合触点
	熔断器一般符号

1·7 测量仪表、灯和信号器件(见表1·1-7)

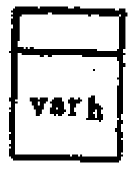
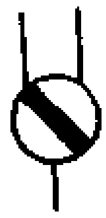
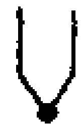
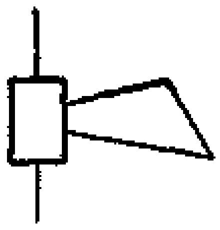
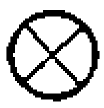
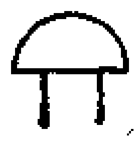
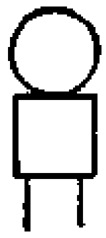
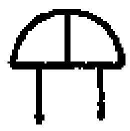
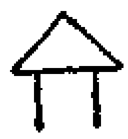
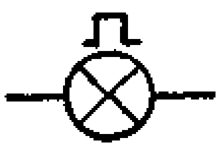
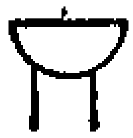
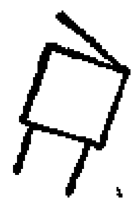
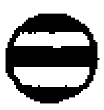
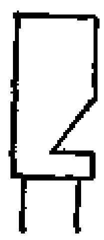
表1·1-7 测量仪表、灯和信号器件（GB4728.8—84）

图形符号	说明	图形符号	说明
	电压表		无功功率表
	无功电流表		功率因数表
	最大需量指示器（由一台积算仪表操纵的）		相位表

（续）

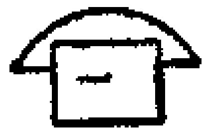
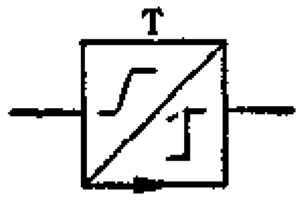
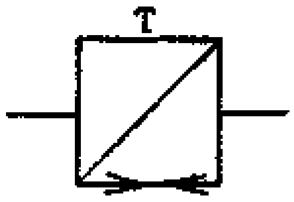
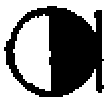
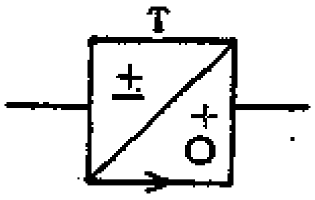
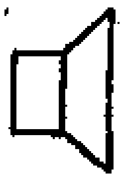
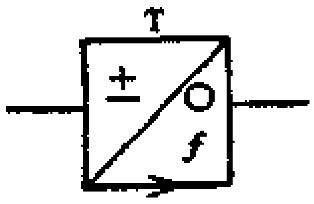
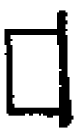
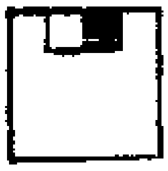
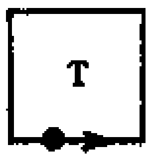
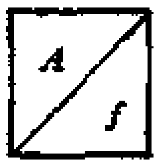
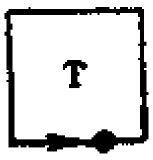
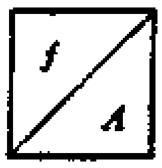
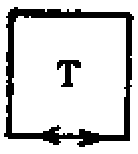
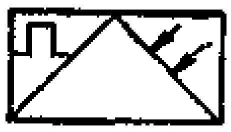
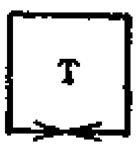
图形符号	说明	图形符号	说明
	频率表		和量仪表（示出电流和量）
	同步表（同步指示器）		极性表
	波长表		静电计
	示波器		记录式功率表
	差动电压表		组合式记录功率表和无功功率表
	检流计		记录式示波器
	盐度计		小时计
	温度计、高温计 注：θ可以由$t°$代替		安培小时计
	转速表		电度表（瓦特小时计）

（续）

图形符号	说明	图形符号	说明
	无功电度表		带有一个去激（断）位置（示出）和两个工作位置的机电型位置指示器
形式1  形式2 	热电偶（示出极性符号） 带直接指示极性的热电偶，负极用粗线表示		电喇叭
	灯一般符号 信号灯一般符号 注：①如果要求指示颜色，则在靠近符号处标出下列字母： RD 红 YE 黄 GN 绿 BU 蓝 WH 白 ②如要指出灯的类型，则在靠近符号处标出下列字母： Ne 氖 Xe 氙 Na 钠 Hg 汞 I 碘 IN 白炽 EL 电发光 ARC 弧光 FL 荧光 IR 红外线 UV 紫外线 LED 发光二极管	优选形  其他形 	电铃
			单打电铃
			电警笛 报警器
	闪光型信号灯	优选形  其他形 	蜂鸣器
	机电型指示器 信号元件		电动气笛

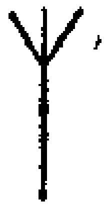
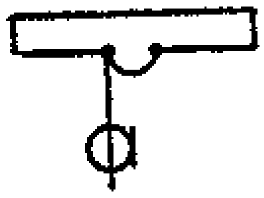
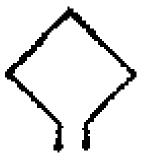
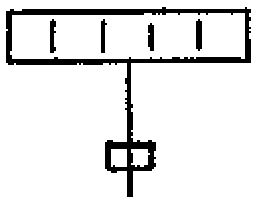
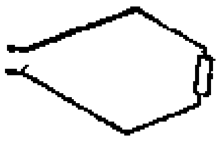
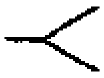
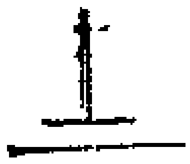
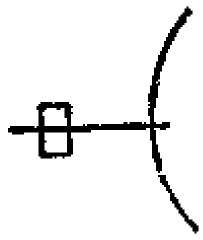
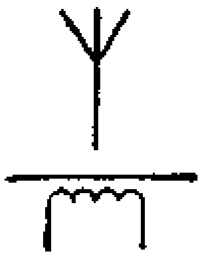
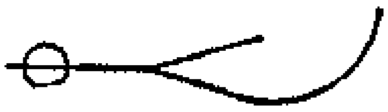
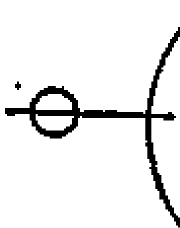
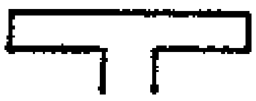
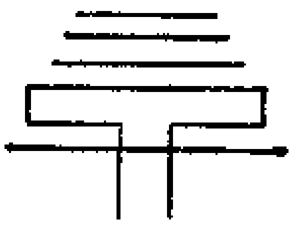
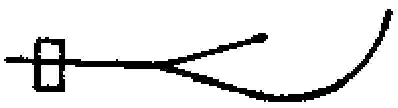
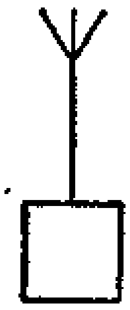
1·8　电信交换和外围设备(见表1·1-8)

表1·1-8　电信交换和外围设备（GB4728.9—85）

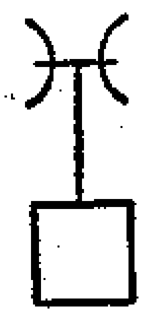
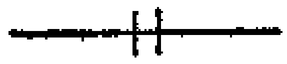
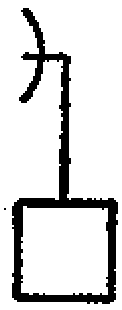
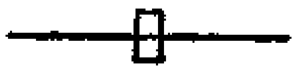
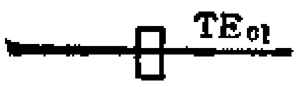
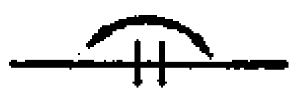
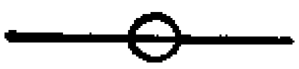
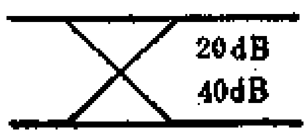
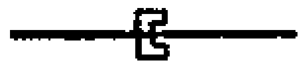
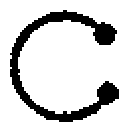
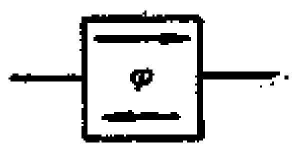
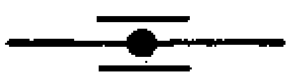
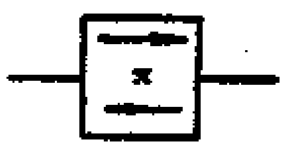
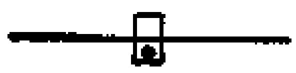
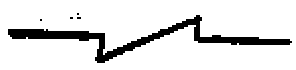
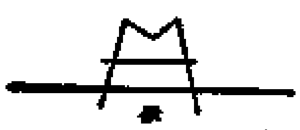
图形符号	说　　明	图形符号	说　　明
	电话机一般符号		再生式电报帮电机
	传声器一般符号		双工电报帮电机
	喉头送话器一般符号		单工双流-单流电报转发器
	扬声器一般符号		双流-交流电报转发器
	受话器一般符号		传真机一般符号
	发报设备		幅-频变换器
	收报设备		频-幅变换器
	半双工电报机 （双向单工电报机）		电光调制器
	双工电报机		声光调制器

1·9 电信传输(见表1-1-9)

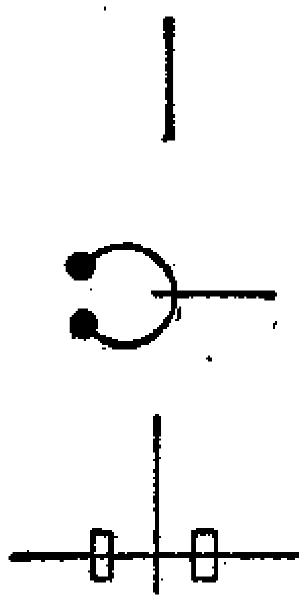
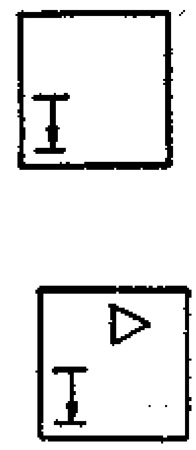
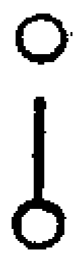
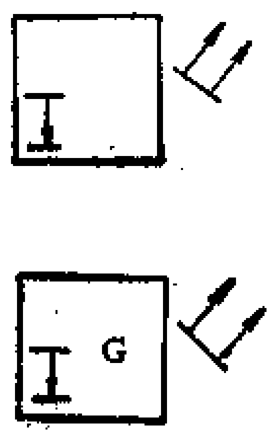
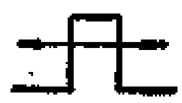
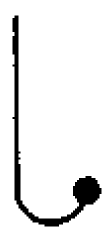
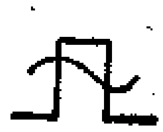
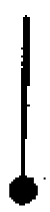
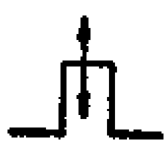
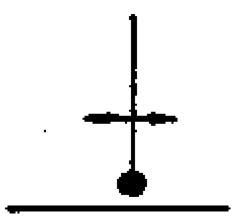
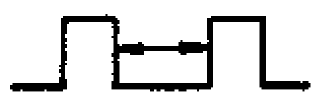
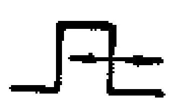
表1·1-9 电信传输（GB4728.10—85）

图形符号	说　明	图形符号	说　明
	天线一般符号		带平衡-不平衡变换器和同轴馈线的折叠偶极子天线
	环形（或框形）天线		带矩形波导馈线的缝隙天线
	菱形天线，表示用一个电阻终端		喇叭天线或喇叭馈电
			带矩形波导喇叭馈电的盒饼形反射器
	地网		矩形波导馈电的抛物面天线
	磁杆天线，例如铁氧体天线等 注：如不致引起混淆，可省去天线一般符号		圆波导馈电的喇叭反射器天线
	偶极子天线		圆波导馈电的抛物面天线
	折叠偶极子天线		
	带有三个引向器和一个反射器的折叠偶极子天线		矩形波导馈电的喇叭反射器天线
	平衡-不平衡变换器		无线电台一般符号

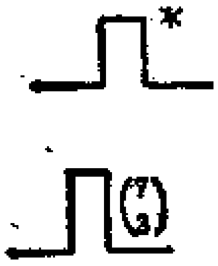
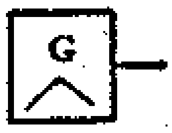
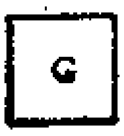
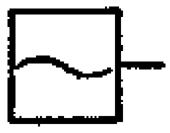
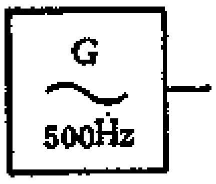
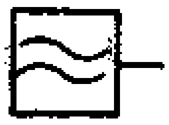
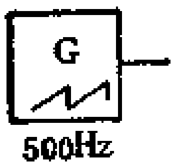
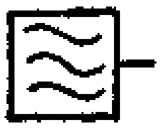
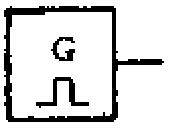
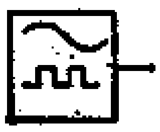
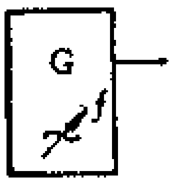
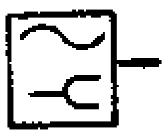
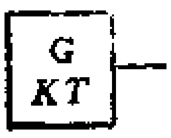
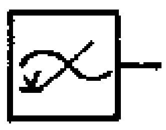
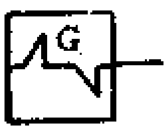
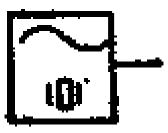
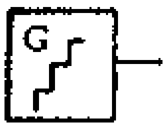
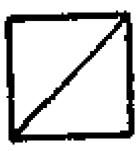
（续）

图形符号	说　　明	图形符号	说　　明
	微波接力通信中间站		成对的对称波导连接器
	微波接力通信终端站		成对的不对称波导连接器 注：不论连接器是何种型式，连接点处线条不能中断
 	矩形波导 示例：传播TE_{01}模式波的矩形波导		可旋转调整的对称连接器接头
	圆形波导		定向耦合器 注：上面数值表示耦合损耗 下面数值表示方向性
	脊形波导		正交混合接头
	同轴波导		空腔谐振器
	有两条导体的微波带状线		定向移相器 注：①φ可以用β代替 ②长箭头表示相位变更的传输方向
	有三条导体的微波带状线		回转器
	高频线（外包固体介质的单芯传输线）		短路器（圆点可有可无）
	充气矩形波导		
	扭波导		
	模式抑制 圆号可以用抑制模式来代替		

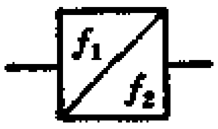
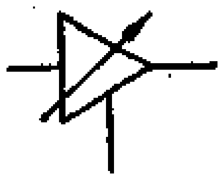
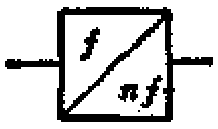
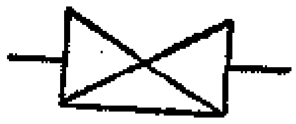
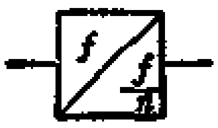
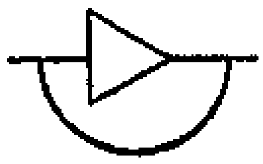
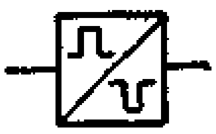
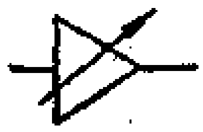
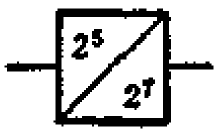
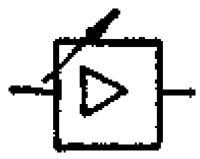
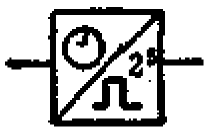
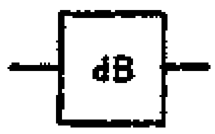
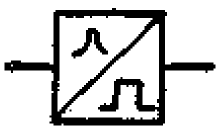
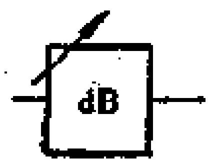
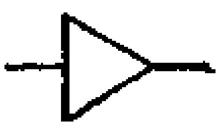
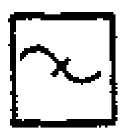
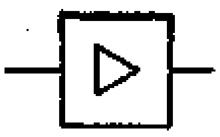
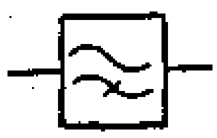
（续）

图形符号	说　明	图形符号	说　明
	未指定类型的耦合器（或馈电）一般符号 示例：接向空腔谐振器的耦合器 接向矩形波导的耦合器		微波激射器（量子放大器）一般符号 示例：用作放大的微波激射器
	窗孔耦合器一般符号 示例：连接头上的窗孔耦合器		激光器（光量子放大器）一般符号 示例：激光发生器
	E平面窗孔耦合器		脉位或脉相调制
	环状耦合器		脉冲频率（脉频）调制
	探针		脉冲振幅（脉幅）调制
	与传输通道耦合的滑动探针		脉冲间隔（脉间）调制
			脉冲宽度（脉宽）调制

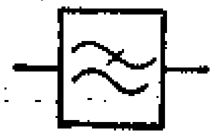
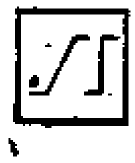
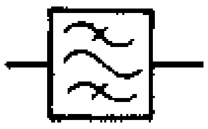
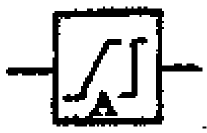
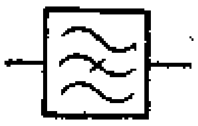
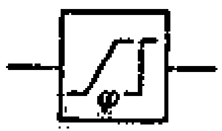
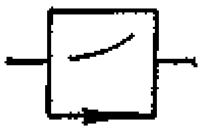
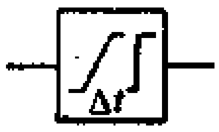
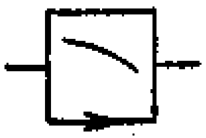
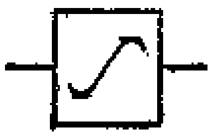
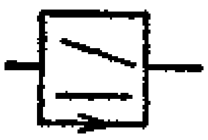
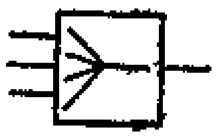
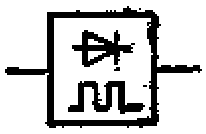
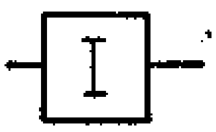
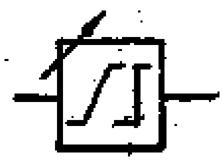
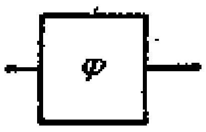
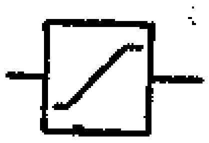
（续）

图形符号	说明	图形符号	说明
	脉冲编码（脉码）调制 注：星号必须用编码的方式代替 示例：7中选3编码		三角波发生器
	电能发生器一般符号 信号发生器 波形发生器		振荡器一般符号
	500Hz正弦波发生器		音频振荡器
	500Hz锯齿波发生器		超音频、载频、射频振荡器
	脉冲发生器		多谐振荡器
	频率可调的正弦波发生器		音叉振荡器
	噪声发生器 K——玻耳兹曼常数 T——热力学温度		压控振荡器
	谐波发生器		晶体振荡器
	阶梯波发生器		变换器一般符号 转换器一般符号

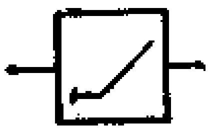
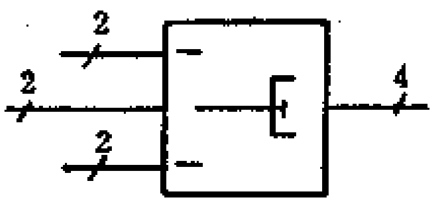
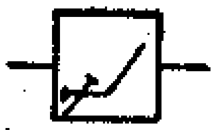
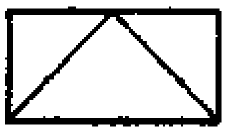
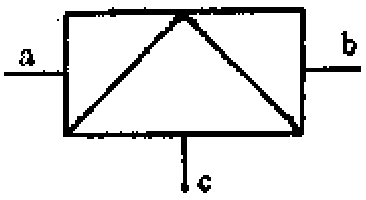
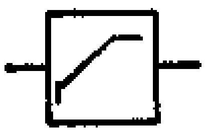
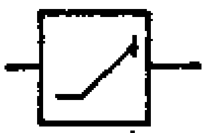
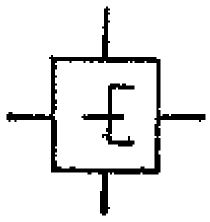
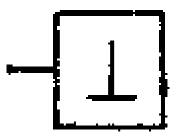
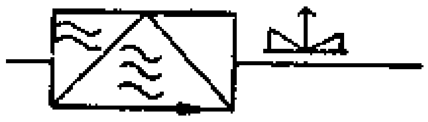
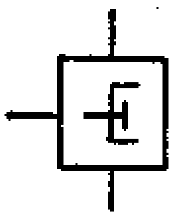
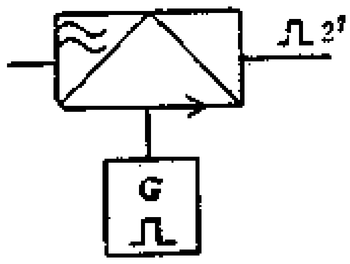
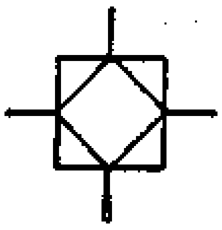
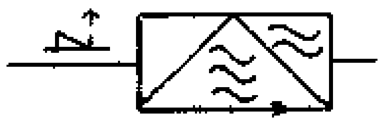
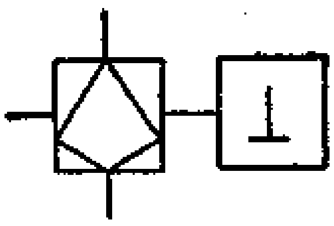
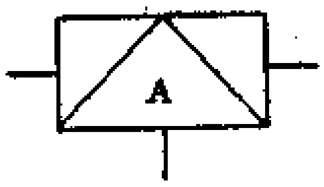
（续）

图形符号	说明	图形符号	说明
	变频器，频率由f_1变到f_2		具有外部直流控制的放大器 注：控制量可在箭头旁标出
	倍频器		负阻抗双向放大器
	分频器		具有输送信号和（或）供电旁路的放大器
	脉冲倒相器	形式1 	可调放大器
	码型变换器，5位二进制码变为7位二进制码	形式2 	
	5位二进制码给出时钟时间的变换器		固定衰减器
	脉冲再生器		可变衰减器
形式1 	放大器一般符号 中继器一般符号 （示出输入和输出） 注：三角形指向传输方向		滤波器一般符号
形式2 			高通滤波器

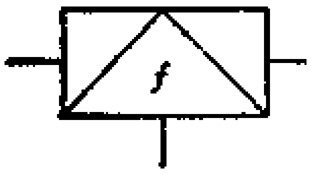
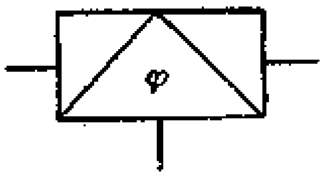
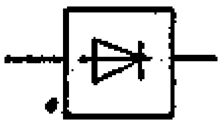
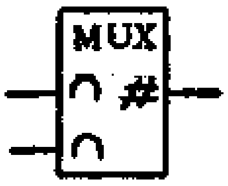
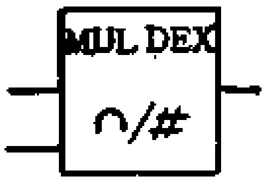
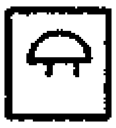
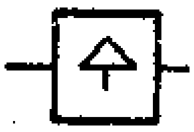
（续）

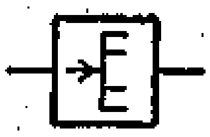
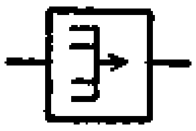
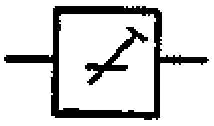
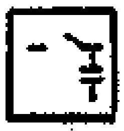
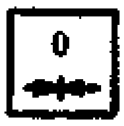
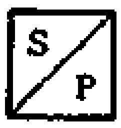
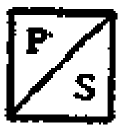
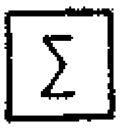
图形符号	说　　明	图形符号	说　　明
	低通滤波器		失真校正器一般符号
	带通滤波器		振幅-频率失真校正器 例如：均衡器
	带阻滤波器		相位-频率失真校正器 注：如需表示相对于φ的时间变量，则以ϕ代替φ
	高频预加重装置		延时-频率失真校正器
	高频去加重装置		无失真振幅控制器
	压缩器		混合网络
	扩展器		电子斩波器
	仿真线 假线		可变均衡器
	变相网络 注：若不发生混淆φ可用β代替		未指定类型的阈器件（例如限幅器）

（续）

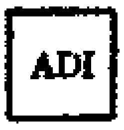
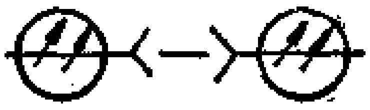
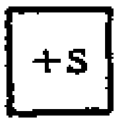
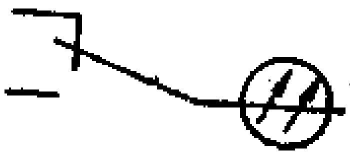
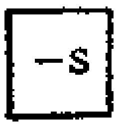
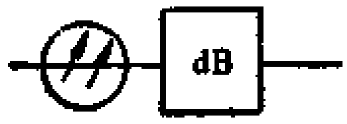
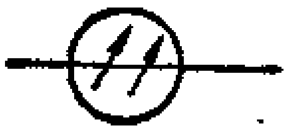
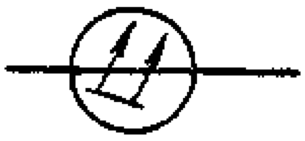
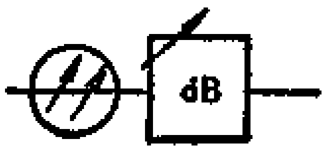
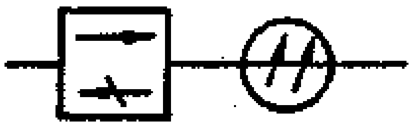
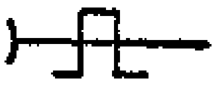
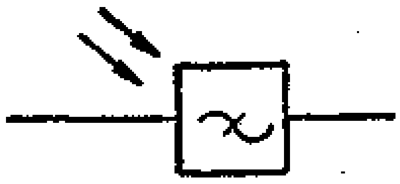
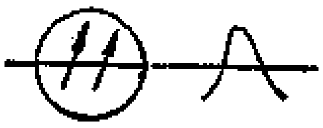
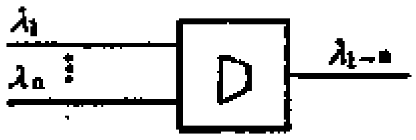
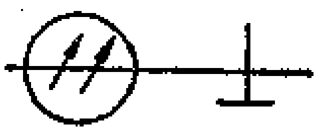
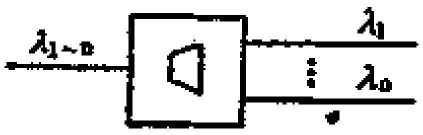
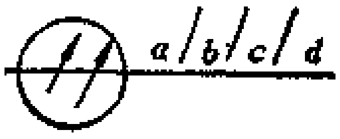
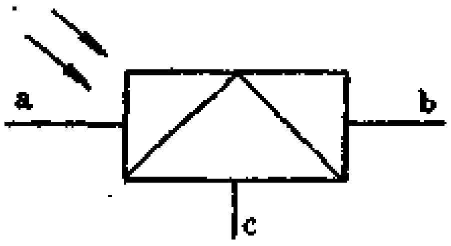
图形符号	说　　明	图形符号	说　　明
	该器件对超过规定阈限值的所有信号均具有线性的输入-输出特性，对输入瞬时值号的振幅在零和阈限值之间则无输出		根据所接收的控制信号将四线电路接至二线或四线电路的设备
	该器件对超过预调阈限值的所有信号均具有线性的输入-输出特性，对输入瞬时信号振幅在零和阈限值之间则无输出		调制器、解调器或鉴别器一般符号 注：该符号的使用如下所述，作注释用的输入线、输出线及其字母可以加到图形符号上  a和b分别表示调制或已调制信号输入，以及已调制和已解调的信号输出 c表示所需载波的输入 限定符号可放在图形符号之内或外面
	正峰值限幅器		
	负峰值限幅器		
	终端器件		
	平衡网络		双边带输出调制器
	具有平衡网络的终端器件		脉码调制器（7位二进制码输出）
	混合线圈		单边带抑制载频输出为音频的解调器
	不对称（斜的）混合线圈 图中示出配有平衡网络		调幅器、解调幅器

（续）

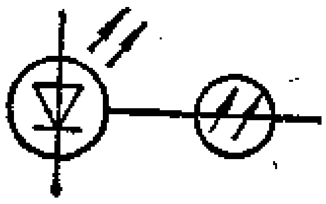
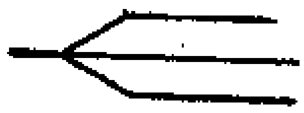
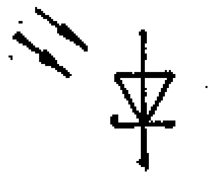
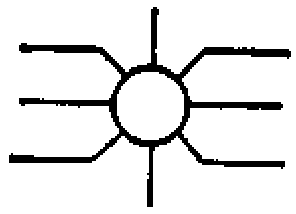
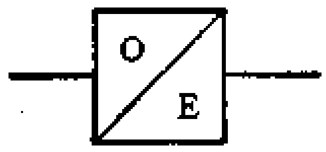
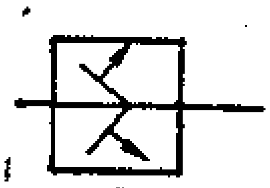
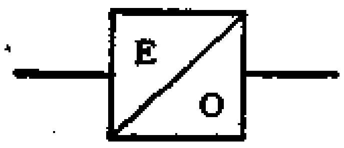
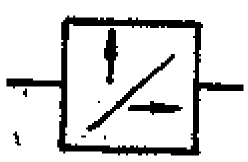
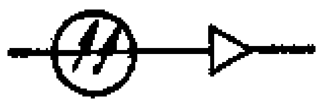
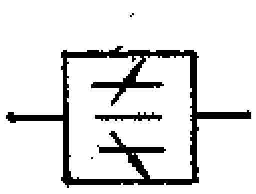
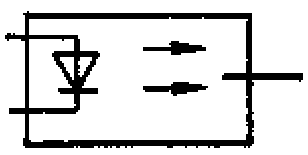
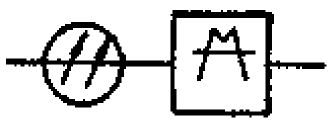
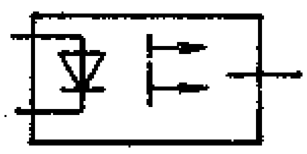
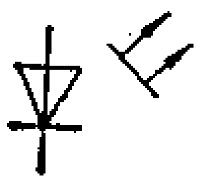
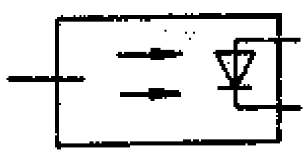
图形符号	说　明
	调频器、鉴频器
	调相器、鉴相器
	检波器
MUX	多路复用功能的限定符号
DX	多路信号分离功能的限定符号 注：如发生混淆，DX可由DMUX代替
MULDEX	多路复用和多路分离功能的限定符号
	具有模拟-数字转换功能的多路复用设备
	具有模拟-数字转换功能的多路复用和多路分离设备
	告警电路
	导频指示器

图形符号	说　明
	分配网络 注：可在输入输出端标出比值
	汇接网络 注：可在输入输出端标出比值
	预调器
	抽样单元
	保持电路
	稳零电路
	串-并变换电路
	并-串变换电路
	汇总电路

（续）

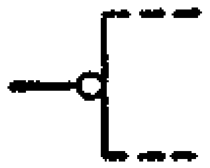
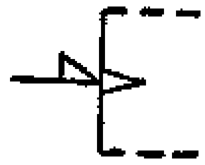
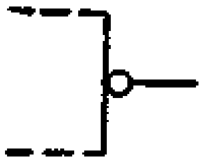
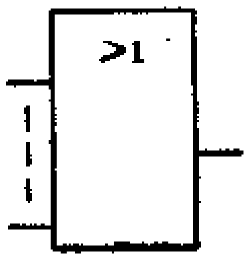
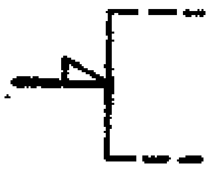
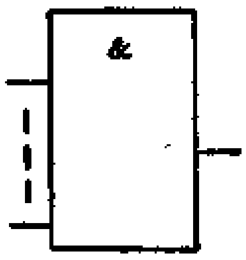
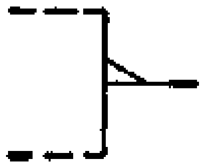
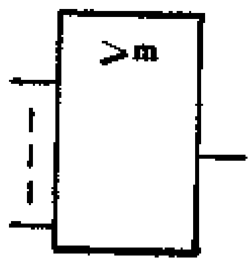
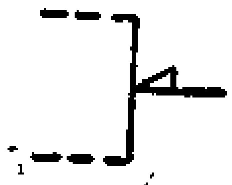
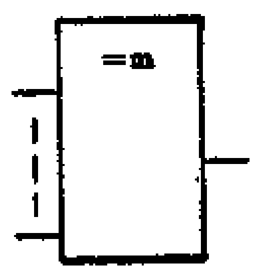
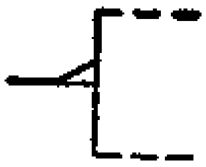
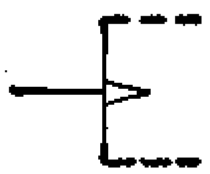
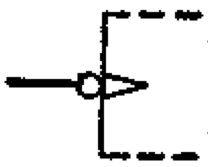
图形符号	说明	图形符号	说明
	隔位翻转电路 （交替反码器）		连接器（插座-插头-插座）
	扰码器		光开关
	解扰器		固定光衰减器
	光纤或光缆一般符号 注：  如果不会引起混淆，可以把表示光波导的符号要素（圆圈内画两个箭头）省略		可变光衰减器
			光隔离器
	多模突变型光纤		光滤波器
	多模渐变型光纤		光波分复用器
	单模光纤		光波分去复用器
	光纤各层直径的补充数据，从内向外表示 （如： a——纤芯直径 b——色层直径 c——一次被覆层直径 d——二次被覆层直径）		光调制器、光解调器 注：a和b分别表示调制信号的输入和已调制信号的输出，或表示已调制信号的输入和解调信号的输出。c表示光载波的输入

（续）

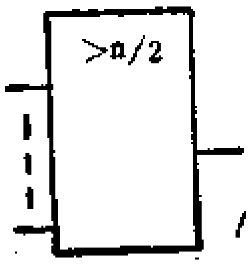
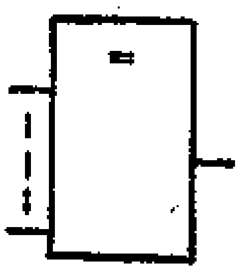
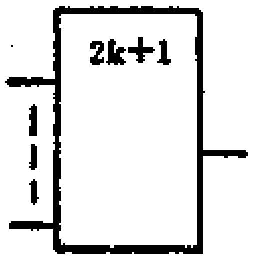
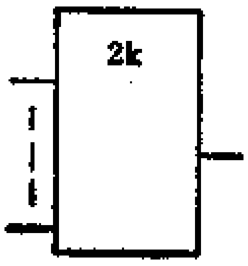
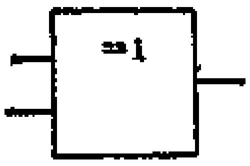
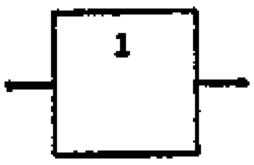
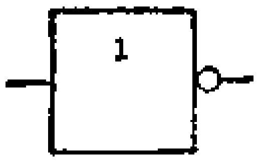
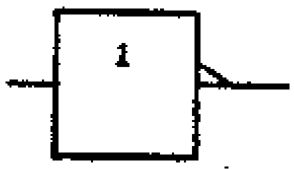
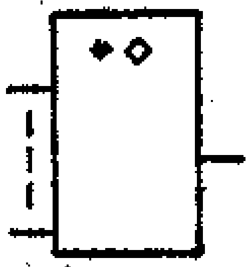
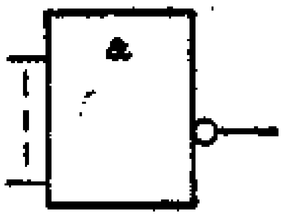
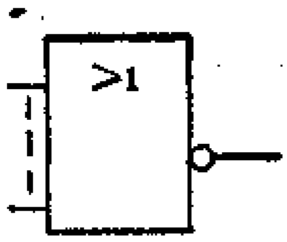
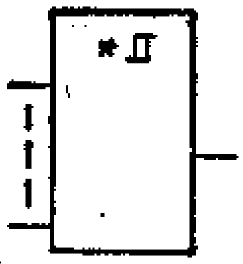
图形符号	说　明	图形符号	说　明
	光纤汇接 注：多根光纤的光从左到右汇集到单根光纤，汇集比可用%或dB表示		带引出光纤的发光二极管 注：带引出光纤的激光二极管用↗代替右上角的↗
	光纤分配 注：单根光纤的光从左到右分配成多根光纤输出，分配比可用%或dB表示		雪崩光电二极管
	光纤组合器（星形耦合器） 注：连接到组合器的每根光纤的光都能耦合到其他的光纤		光电转换器
	混模器（搅模器）		电光转换器
	分束器		光中继器
	包层模消除器		采用发光二极管的光发送机
	光纤滤模器		采用激光二极管的光发送机
	激光二极管		光接收机

1·10　二进制逻辑单元(见表1·1-10)

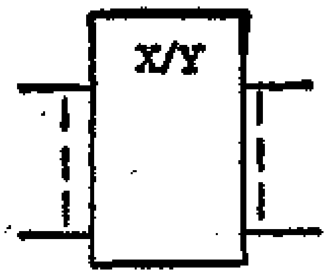
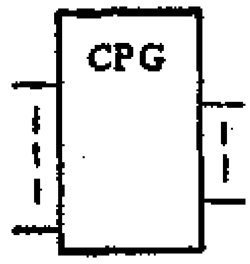
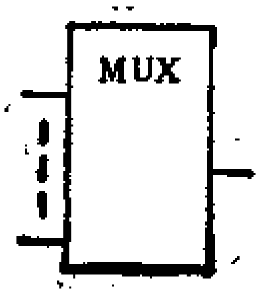
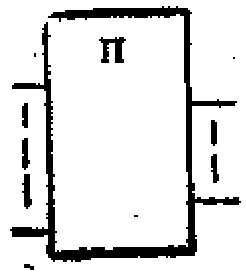
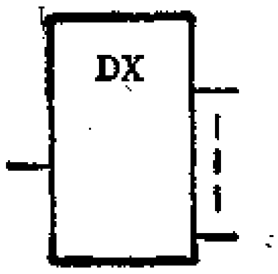
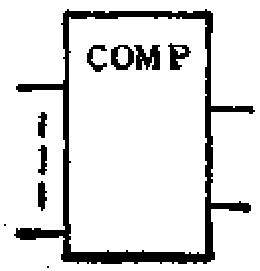
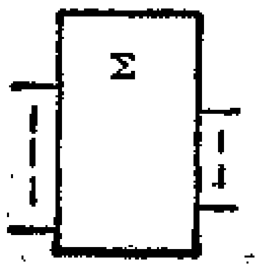
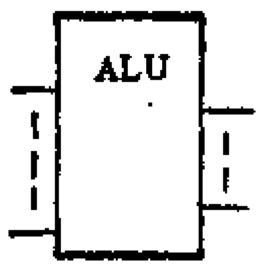
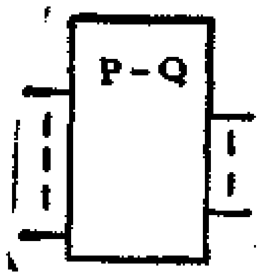
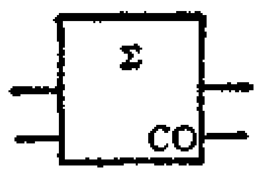
表1·1-10　二进制逻辑单元（GB4728.12—85）

图形符号	说　　明	图形符号	说　　明
	逻辑非，示在输入端		带极性指示符的动态输入 内部"1"状态（暂时）与连线上从H电平到L电平的转换过程相对应。在其他所有时间，内部逻辑状态为"0"
	逻辑非，示在输出端 内部"1"状态与外部"0"状态相对应 注：连接线可以延长通过小圆		"或"单元，通用符号 只有一个或一个以上的输入呈现"1"状态，输出才呈现其"1"状态 注：如果不会引起意义混淆，"≥1"可以用"1"代替
	逻辑极性、极性指示符 } 示在输入端		"与"单元，通用符号 只有所有输入呈现"1"状态，输出才呈现"1"状态
	逻辑极性、极性指示符 } 示在输出端		逻辑门槛单元，通用符号 只有呈现"1"状态输入的数目等于或大于限定符号中以m表示的数值，输出才呈现"1"状态 注：①m总是小于输入端的数目 ②具有m＝1的单元就是通常所说的或单元（见"或"单元通用符号）
	逻辑极性、极性指示符 } 示在信息流为从右到左的输入端		等于m单元，通用符号 只有呈现"1"状态输入的数目等于限定符号中以m表示的数值，输出才呈现"1"状态 注：①同逻辑门槛单元通用符号的注 ②m＝1的2输入单元就是通常所说的"异或"单元
	逻辑极性、极性指示符 } 示在信息流为从右到左的输出端 内部逻辑"1"状态与连线上的L电平相对应		
	动态输入 内部"1"状态(暂时)与从外部"0"状态到外部"1"状态的转换过程相对应。其他所有时间，内部逻辑状态为"0" 在采用逻辑极性符号的图上，内部"1"状态(暂时)与连接线上从L电平到H电平的转换过程相对应。在其他所有时间，内部逻辑状态为"0"		
	带逻辑非的动态输入 内部"1"状态（暂时）与从外部"1"状态到外部"0"状态的转换过程相对应。在其他所有时间，内部逻辑状态为"0"		

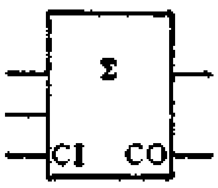
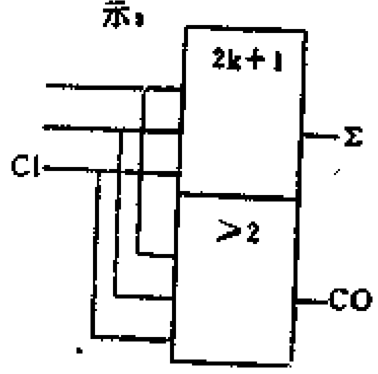
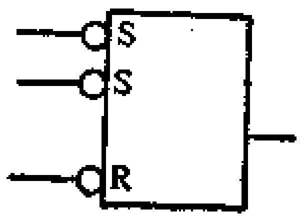
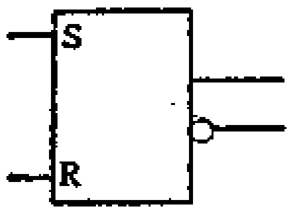
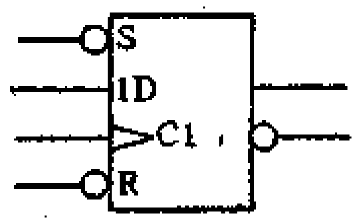
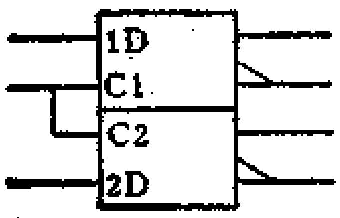
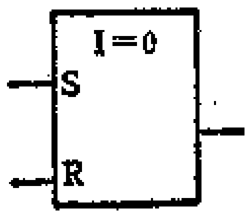
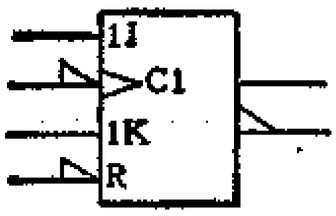
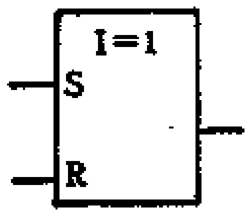
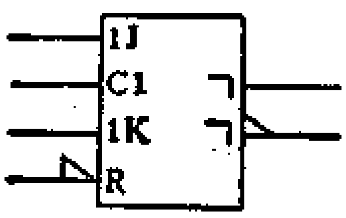
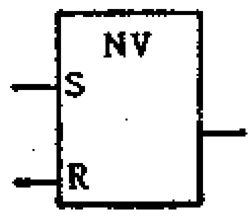
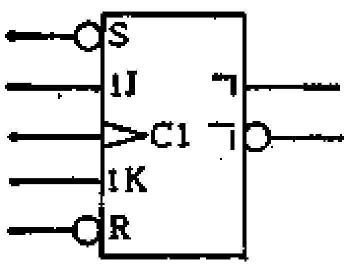
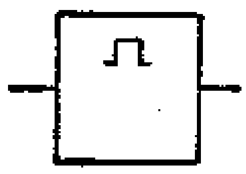
（续）

图形符号	说　　明
	多数单元，通用符号 只有多数输入呈现"1"状态，输出才呈现"1"状态
	逻辑恒等单元，通用符号 只有所有输入呈现相同的状态，输出才呈现"1"状态
	奇数单元（奇数校验单元）模2加单元，通用符号 只有呈现"1"状态的输入数目为奇数（1、3、5等），输出才呈现"1"状态
	偶数单元（偶数校验单元），通用符号 只有呈现"1"状态的输入数目为偶数（0、2、4等），输出才呈现其"1"状态
	异或单元 只有两个输入之一呈现"1"状态，输出才呈现"1"状态
	输出无专门放大的缓冲单元 只有输入呈现"1"状态，输出才呈现"1"状态
	非门 反相器（在用逻辑非符号表示器件的情况下） 只有输入呈现外部"1"状态，输出才呈现外部"0"状态
	反相器（在用逻辑极性符号表示器件的情况下） 只有输入呈现H电平，输出才呈现L电平
	分布连接 点功能　}通用符号 线功能 分布连接是一种将许多单元的指定输出端连接起来，以实现"与"功能或"或"功能的连接 注：星号"*"应由功能限定符号即"&"或"≥1"代替，在各导线连接在一起的每个交点上应标功能限定符号，也就是"&"或"≥1"，只有在不会引起混淆的情况下，才可省略
	与非门
	或非门
	具有磁滞特性的单元，通用符号

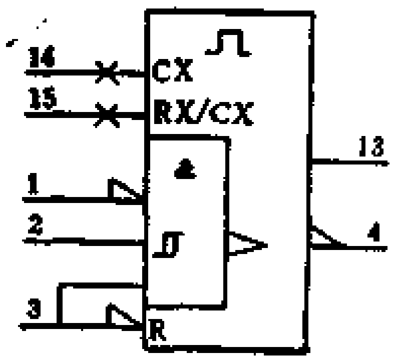
（续）

图形符号	说　　明	图形符号	说　　明
	编　码　器 代码转换器 }通用符号 注：X和Y可分别用表示输入和输出信息代码的适当符号代替		先行进位产生器（进位传递和产生），通用符号
	多路选择器，通用符号 如选出多路选择器的一个输入，输出的内部逻辑状态呈现所选输入的内部逻辑状态。如无输入被选，则输出呈现其内部“0”状态 注：输入和控制选择作用的控制关系也必须示出，例如用写在单元内也可写在控制框内的输入和有关关联标记来示		乘法器，通用符号
	多路分配器，通用符号 如选出多路分配器的一个输出，该输出的内部逻辑状态呈现输入的内部逻辑状态。否则该输出呈现其内部“0”状态 注：①同多路选择器的注 ②如会引起混淆，DX可以用DMUX代替		数值比较器，通用符号 规定级联比较器为从低位到高位进行比较，否则应有说明。例如用“[H-L]”放在限定符号“COMP”下面
	加法器，通用符号		算术逻辑单元，通用符号
	减法器，通用符号		半加器

（续）

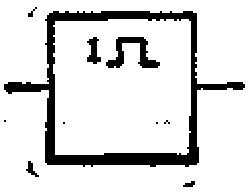
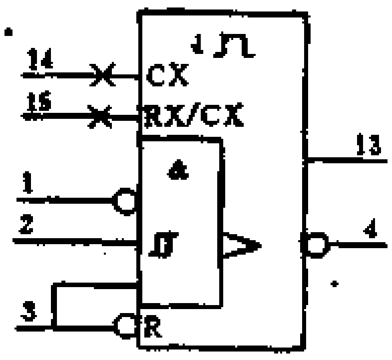
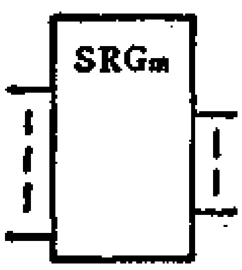
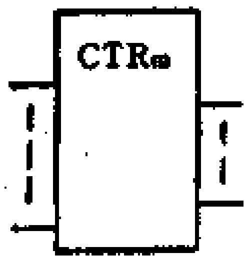
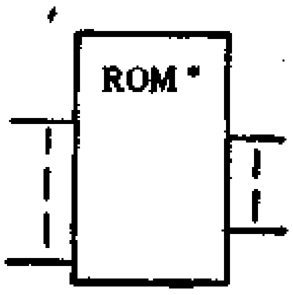
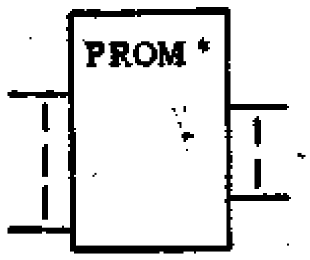
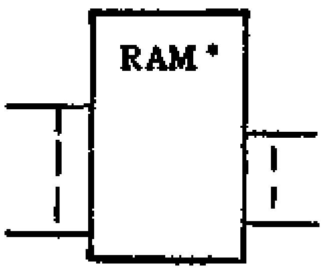
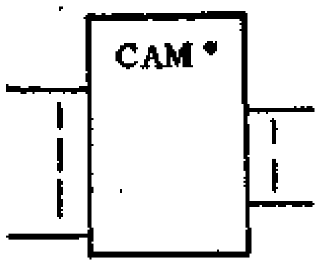
图形符号	说明	图形符号	说明
	一位全加器 注：简单的一位全加器可用奇数单元（模2加单元）和逻辑门槛单元另行描述，如下所示： 		R-S锁存器
	RS触发器 RS锁存器		边沿上升沿D触发器
	双D锁存器		初始"0"状态的RS-双稳 在电源接通瞬间，输出处在其内部"0"状态
	边沿下降沿JK触发器		初始"1"状态的RS-双稳 在电源接通瞬间，输出处在其内部"1"状态
	脉冲触发（主从）JK触发器		RS-双稳，非易失的 在电源接通瞬间，输出的内部逻辑状态与电源断开时的状态相同
	数据锁定出（主从）JK触发器		单稳，可重复触发（在输出脉冲期间） 单个发射 } 通用符号 每次输入变到其"1"状态，输出就变到或维持其"1"状态，经过由特定器件的特性决定的时间间隔后，输出回到其"0"状态，从输入最后一次变到其"1"状态开始算起

（续）

图形符号	说明
	示例： 可重复触发单稳态触发器（有清除端） 功能表：

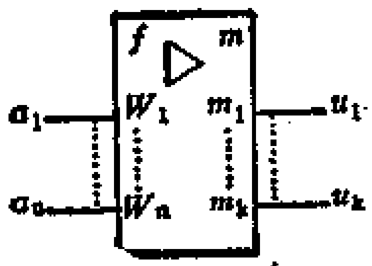
输入 1	输入 2	输入 3	输出 13	输出 4
—	—	L	L	H
H	—	H	L	H
—	L	H	L	H
L	↑	H	⎍	⊔
↓	H	H	⎍	⊔
L	H	↑	⎍	⊔

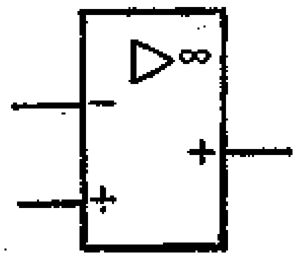
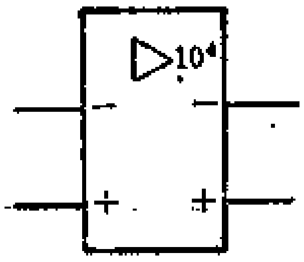
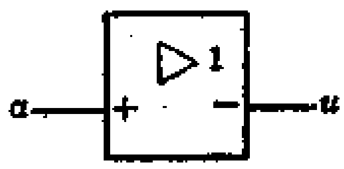
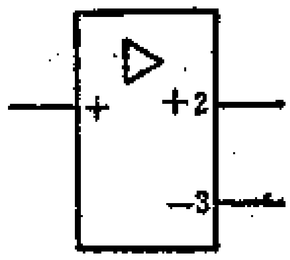
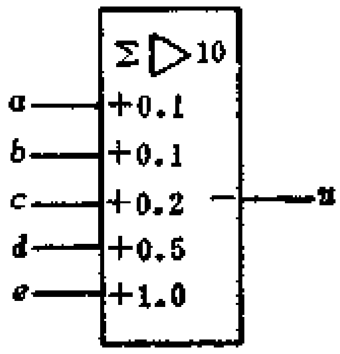
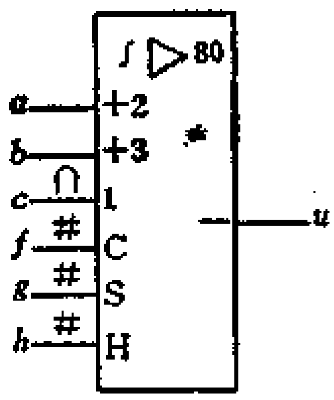
注：功能表的第2和第3行各自表明在任何输出脉冲启动完成后，相关输入呈现其指定的电平之前，输出将呈现的逻辑电平

图形符号	说明
	单稳，非重复触发（在输出脉冲期间），通用符号 只当输入变到其"1"状态时，输出才变到其"1"状态。经过由特定器件的特性决定的时间间隔后，输出回到它的"0"状态，不管在此期间输入变量有什么变化
	示例： 单稳态触发器（有斯密特触发器）
	移位寄存器，通用符号 注：m应以位数代替
	循环长度为2^m的计数器（计数器模2^m），通用符号 注：m应以实际数字代替
	只读存储器，通用符号 注：星号"*"必须用地址和位数的适当符号来代替。此时，符号1k代表1024
	可编程序的只读存储器，通用符号 注：同只读存储器的注
	随机存取存储器（读/写存储器），通用符号 注：同只读存储器的注
	内容可寻址存储器（联想存储器），通用符号 注：同只读存储器的注

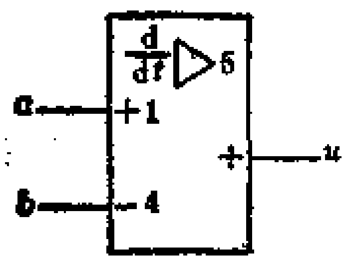
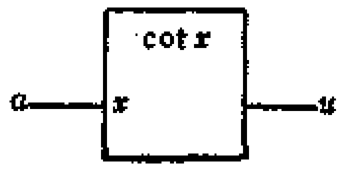
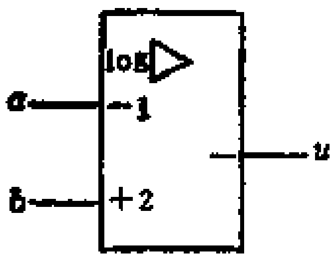
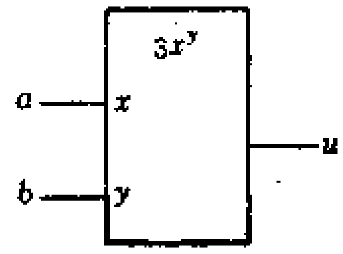
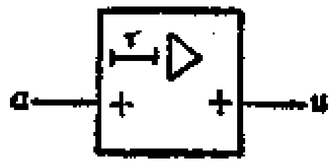
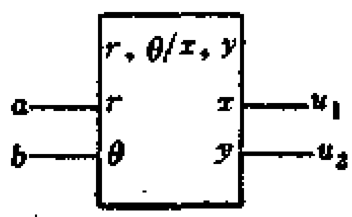
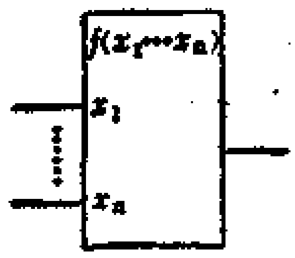
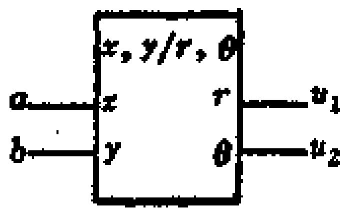
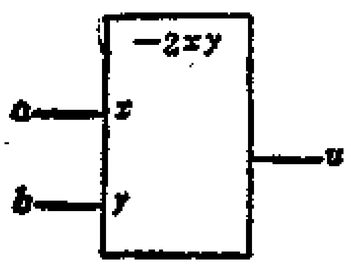
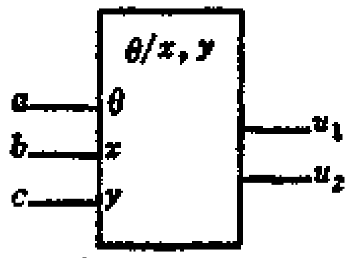
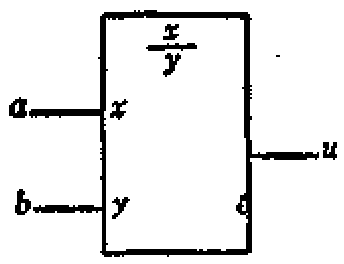
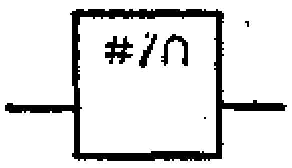
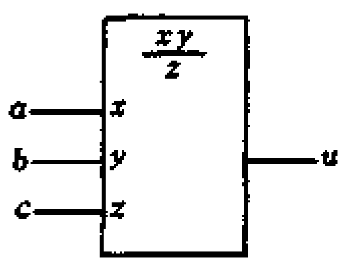
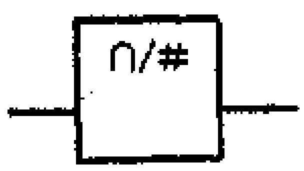
1·11　模拟单元（见表1·1-11）

表1·1-11　模拟单元（GB4728.13—85）

图形符号	说　　明
∩	模拟信号识别符
#	数字信号识别符 注：一个时序的比特数（m）可以用m#表示
Σ	求和
∫	积分
$\frac{d}{dt}$	微分
log	对数
F	频率补偿
I	积分初始值
C	控制（定义1状态允许积分）
H	保持（定义1状态保持）
R	复位（定义1状态置输出为零）
S	置位（定义1状态置输出为初始值）
U	电源电压〔其数值和极性（+，－）放在U之后〕
E	扩展点（即允许外接引出点）
	运算放大器一般符号 $a_1\cdots a_n$为输入信号 $u_1\cdots u_k$为输出信号 $W_1\cdots W_n$代表加权系数有正负号的数值 $m_1\cdots m_k$代表放大系数有正负号的数值 $u_i=m\cdot m_i\cdot f(W_1\cdot a_1,\ W_2\cdot a_2\cdots,\ W_n\cdot a_n)$ 式中，$i=1,2,\cdots,k$ 除了那些实质上是数字的以外，放大系数的符号都应保持在每个输出上 当整个单元只有一个放大系数，或者从加权系数和放大系数提出公因子时，定性符号中的“m”可以用绝对值代替 当m=1时，数字“1”可以省略。符号总是应保持在模拟输出端。在额定开路增益非常高而且不特别关心其具体数值的场合，推荐用符号∞作为放大系数

图形符号	说　　明
	示例：高增益差分放大器（运算放大器）
	额定放大系数为10000并有两个互补输出的高增益放大器
	放大系数为1的反相放大器 $u=-1\cdot a$
	具有两个输出的放大器，上面一个不反相，放大系数为2；下面一个反相，放大系数为3
	求和放大器 $u=-10(0.1a+0.1b+0.2c+0.5d+1.0e)$ $=-(a+b+2c+5d+10e)$
	积分放大器（积分器） 如果$f=1$，$g=0$，$h=0$ 则 $u=-80\left[c_{(t=0)}+\int_0^t(2a+3b)dt\right]$ 注：如果不会引起混淆，信号识别用的符号（∩和#）可以省略

（续）

图形符号	说明	图形符号	说明
	微分放大器（微分器） $u=5\frac{d}{dt}(a-4b)$		余切函数 $u=\cot a$
	对数放大器 $u=-\log(-a+2b)$		指数函数 $u=3a^{b}$
	定延迟放大器 $u(t-\tau)=W_{\tau}(p)\times a(t)$ 注：p为微分算子 $W_{\tau}(p)$为传递函数 τ为延迟时间，可以用具体数值代替		坐标转换器，极坐标变到直角坐标 $u_1=a\cdot\cos b$ $u_2=a\cdot\sin b$
	函数器一般符号 $f(x_1\cdots\cdots x_n)$ 为函数的适当标记，必要时应有详细说明 $x_1\cdots\cdots x_n$为函数自变量 注：图形"$\div$/"不应用来表示除法，因为该符号与电平转换器和译码器的符号容易相混		坐标转换器，直角坐标变到极坐标 $u_1=\sqrt{a^2+b^2}$ $u_2=\arctan\frac{b}{a}$
	示例：加权系数为－2的乘法器 $u=-2ab$		坐标轴旋转器 $u_1=b\cdot\cos a-c\cdot\sin a$ $u_2=c\cdot\cos a+b\cdot\sin a$
	除法器 $u=\frac{a}{b}$		数-模转换器一般符号
	乘法-除法器 $u=\frac{ab}{c}$		模-数转换器一般符号

2 电气技术中的文字符号

2·1 电气设备常用基本文字符号及常用辅助文字符号(见表1·1-12，表1·1-13)

表1·1-12 电气设备常用基本文字符号（GB7159—87）

设备、装置和元器件种类	举例 名称	基本文字符号 单字母	基本文字符号 双字母
组件部件	分离元件放大器 激光器 调节器	A	
	本表其他地方未提及的组件、部件		
	电桥		AB
	晶体管放大器		AD
	集成电路放大器		AJ
	磁放大器		AM
	电子管放大器		AV
	印刷电路板		AP
	抽屉柜		AT
	支架盘		AR
非电量到电量变换器或电量到非电量变换器	热电传感器 热电池 光电池 测功计 晶体换能器 送话器 拾音器 扬声器 耳机 自整角机 旋转变压器 模拟和多级数字变换器或传感器（用作指示和测量）	B	
	压力变换器		BP
	位置变换器		BQ
	旋转变换器（测速发电机）		BR
	温度变换器		BT
	速度变换器		BV
电容器	电容器	C	
二进制元件 延迟器件 存储器件	数字集成电路和器件： 延迟线 双稳态元件 单稳态元件	D	

（续）

设备、装置和元器件种类	举例 名称	基本文字符号 单字母	基本文字符号 双字母
二进制元件 延迟器件 存储器件	磁芯存储器 寄存器 磁带记录机 盘式记录机	D	
其他元器件	本表其他地方未规定的器件	E	
	发热器件		EH
	照明灯		EL
	空气调节器		EV
保护器件	过电压放电器件避雷器	F	
	具有瞬时动作的限流保护器件		FA
	具有延时动作的限流保护器件		FR
	具有延时和瞬时动作的限流保护器件		FS
	熔断器		FU
	限压保护器件		FV
发生器 发电机 电源	旋转发电机振荡器	G	
	发生器		GS
	同步发电机		GS
	异步发电机		GA
	蓄电池		GB
	旋转式或固定式变频机		GF
信号器件	声响指示器	H	HA
	光指示器		HL
	指示灯		HL
继电器 接触器	瞬时接触继电器	K	KA
	瞬时有或无继电器		KA
	交流继电器		KA
	闭锁接触继电器（机械闭锁或永磁铁式有或无继电器）		KL
	双稳态继电器		KL
	接触器		KM
	极化继电器		KP

（续）

设备、装置和元器件种类	举例 名称	基本文字符号 单字母	基本文字符号 双字母
继电器 接触器	簧片继电器	K	KR
	延时 有或无继电器		KT
	逆流继电器		KR
电感器 电抗器	感应线圈 线路陷波器 电抗器（并联和串联）	L	
电动机	电动机	M	
	同步电动机		MS
	可做发电机或电动机用的电机		MG
	力矩电动机		MT
模拟元件	运算放大器 混合模拟/数字器件	N	
测量设备 试验设备	指示器件 记录器件 积算测量器件 信号发生器	P	
	电流表		PA
	（脉冲）计数器		PC
	电度表		PJ
	记录仪器		PS
	时钟、操作时间表		PT
	电压表		PV
电力电路的开关器件	断路器	Q	QF
	电动机保护开关		QM
	隔离开关		QS
电阻器	电阻器	R	
	变阻器		
	电位器		RP
	测量分路表		RS
	热敏电阻器		RT
	压敏电阻器		RV
控制、记忆、信号电路的开关器件选择器	拨号接触器 连接级	S	
	控制开关		SA

（续）

设备、装置和元器件种类	举例 名称	基本文字符号 单字母	基本文字符号 双字母
控制、记忆、信号电路的开关器件选择器	选择开关	S	SA
	按钮开关		SB
	机电式有或无传感器（单级数字传感器）		
	液体标高传感器		SL
	压力传感器		SP
	位置传感器（包括接近传感器）		SQ
	转数传感器		SR
	温度传感器		ST
变压器	电流互感器	T	TA
	控制电路电源用变压器		TC
	电力变压器		TM
	磁稳压器		TS
	电压互感器		TV
调制器 变换器	鉴频器 解调器 变频器 编码器 变流器 逆变器 整流器 电报译码器	U	
电子管 晶体管	气体放电管 二极管 晶体管 晶闸管	V	
	电子管		VE
	控制电路用电源的整流器		VC
传输通道 波导 天线	导线 电缆 母线 波导 波导定向耦合器 偶极天线 抛物天线	W	

（续）

设备、装置和元器件种类	举例 名称	基本文字符号 单字母	基本文字符号 双字母
端子 插头 插座	连接插头和插座 接线柱 电缆封端和接头 焊接端子板	X	
	连接片		XB
	测试插孔		XJ
	插头		XP
	插座		XS
	端子板		XT
电气操作的机械器件	气阀	Y	
	电磁铁		YA
	电磁制动器		YB
	电磁离合器		YC
	电磁吸盘		YH
	电动阀		YM
	电磁阀		YV
终端设备 混合变压器 滤波器 均衡器 限幅器	电缆平衡网络 压缩扩展器 晶体滤波器 网络	Z	

表1·1-13 常用辅助文字符号（GB7159—87）

文字符号	名称	文字符号	名称
A	电流	CW	顺时针
A	模拟	CCW	逆时针
AC	交流	D	延时（延迟）
A	自动	D	差动
AUT		D	数字
ACC	加速	D	降
ADD	附加	DC	直流
ADJ	可调	DEC	减
AUX	辅助	E	接地
ASY	异步	EM	紧急
B	制动	F	快速
BRK		FB	反馈
BK	黑	FW	正，向前
BL	蓝	GN	绿
BW	向后	H	高
C	控制	IN	输入

（续）

文字符号	名　　称	文字符号	名　　称
INC	增	R	反
IND	感应	RD	红
L	左	R	复位
L	限制	RST	
L	低	RES	备用
LA	闭锁	RUN	运转
M	主	S	信号
M	中	ST	起动
M	中间线	S	置位，定位
M	手动	SET	
MAN		SAT	饱和
N	中性线	STE	步进
OFF	断开	STP	停止
ON	闭合	SYN	同步
OUT	输出	T	温度
P	压力	T	时间
P	保护	TE	无噪声(防干扰）接地
PE	保护接地	V	真空
PEN	保护接地与中性线共用	V	速度
PU	不接地保护	V	电压
R	记录	WH	白
R	右	YE	黄

2·2 电器接线端子的标记与特定导线的标记（见表1·1-14，表1·1-15）

表1·1-14 电器接线端子的标记
(GB4026—83)

电器接线端子的名称		字母符号
交流系统	1相	U
	2相	V
	3相	W
	中性线	N
保护接地		PE
接　地		E
无噪声接地		TE
机壳或机架		MM
等电位		CC

表1·1-15 特定导线的标记
(GB4026—83)

导线名称		字母数字符号
交流系统的电源	1相	L1
	2相	L2
	3相	L3
	中性线	N
直流系统的电源	正	L+
	负	L-
	中间线	M
保护接地线		PE
不接地的保护导线		PU
保护接地线和中性线共用一线		PEN
接地线		E
无噪声接地线		TE
机壳或机架		MM
等电位		CC

3　希腊字母表(见表1·1-16)

表1·1-16　希腊字母表

正体 大写	正体 小写	斜体 大写	斜体 小写	名称	英文读音
Α	α	*Α*	*α*	alpha	['ælfə]
Β	β	*Β*	*β*	beta	['bi:tə, 'beitə]
Γ	γ	*Γ*	*γ*	gamma	['gæmə]
Δ	δ	*Δ*	*δ*	delta	['deltə]
Ε	ε, ϵ	*Ε*	*ε*	epsilon	['epsilən, ep'sailən]
Ζ	ζ	*Ζ*	*ζ*	zeta	['zi:tə]
Η	η	*Η*	*η*	eta	['i:tə, 'eitə]
Θ	θ, ϑ	*Θ*	*θ, ϑ*	theta	['θi:tə]
Ι	ι	*Ι*	*ι*	iota	[ai'outə]
Κ	κ, ϰ	*Κ*	*κ*	kappa	['kæpə]
Λ	λ	*Λ*	*λ*	lambda	['læmdə]
Μ	μ	*Μ*	*μ*	mu	[mju:]
Ν	ν	*Ν*	*ν*	nu	[nju:]
Ξ	ξ	*Ξ*	*ξ*	xi	[ksai, gzai, zai]
Ο	ο	*Ο*	*ο*	omicron	[ou'maikrən]
Π	π	*Π*	*π*	pi	[pai]
Ρ	ρ	*Ρ*	*ρ*	rho	[rou]
Σ	σ	*Σ*	*σ*	sigma	['sigmə]
Τ	τ	*Τ*	*τ*	tau	[tau, tɔ:]
Υ	υ	*Υ*	*υ*	upsilon	['ju:psilən, ju:'psailən]
Φ	ϕ, φ	*Φ*	*ϕ, φ*	phi	[fai]
Χ	χ	*Χ*	*χ*	chi	[kai]
Ψ	ψ	*Ψ*	*ψ*	psi	[psi:]
Ω	ω	*Ω*	*ω*	omega	['oumigə, ou'mi:gə]

4　物理和数学常数[1][2]

4·1　物理常数

阿伏加德罗常数

$N_A = 6.022045 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

真空中的光速

$c = 2.99792458 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

电子电荷

$e = 1.6021892 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} = 4.803242 \times 10^{-10}$ 静电单位

普朗克常数　$h = 6.626176 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$

$\hbar = h / 2\pi$

$= 1.0545887 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$

电子伏特　$1\,\mathrm{eV} = 1.6021892 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$

玻耳兹曼常数　$k = 1.380662 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$

斯武藩-玻耳兹曼常数

$\sigma = 5.67032 \times 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$

电子静止质量　$m_e = 9.109534 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

质子静止质量　$m_p = 1.6726485 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

中子静止质量　$m_n = 1.6749543 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

电子半径　$r_e = 2.8179380 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$

电子的康普顿波长　$\lambda_e = 2.4263089 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$

玻尔半径　$a_0 = 5.2917706 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$

玻尔磁子　$\mu_B = 9.274078 \times 10^{-24}\,\mathrm{A \cdot m^2}$

核磁子　$\mu_N = 5.050824 \times 10^{-27}\,\mathrm{A \cdot m^2}$

里德伯常数　$R_\infty = 1.097373177 \times 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}$

法拉第常数　$F = 9.648456 \times 10^{4}\,\mathrm{C \cdot mol^{-1}}$

摩尔气体常数　$R = 8.31441\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$

引力常数　$G = 6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$

绝对零度　$T_0 = -273.15\,^\circ\mathrm{C}$

标准重力加速度　$g_n = 9.80665\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

标准大气压　$1\,\mathrm{atm} = 1.01325 \times 10^{5}\,\mathrm{Pa}$

真空介电常数　$\varepsilon_0 = 8.854187818 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

真空磁导率　$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$

$= 1.25663706144 \times 10^{-6}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$

空气中的声速(℃)　$= 331.68\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

水中的声速(20℃)　$= 1482.9\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

4·2 数学常数(见表1-1-17)

表1-1-17 常用常数及其对数

常 数	n	$\lg n$
π	3.141593	0.49715
2π	6.283185	0.79818
3π	9.424778	0.97427
4π	12.566371	1.09921
5π	15.707963	1.196120
$\frac{\pi}{2}$	1.570796	0.19612
$\frac{\pi}{3}$	1.047198	0.02003
$\frac{\pi}{4}$	0.785398	$\bar{1}.89509$
$\frac{\pi}{6}$	0.523599	$\bar{1}.71900$
$\frac{\pi}{180}$	0.017453	$\bar{2}.24188$
$\frac{\pi}{10800}$	0.000291	$\bar{4}.46373$
$\frac{\pi}{648000}$	0.000005	$\bar{6}.68557$
π^2	9.869604	0.99430
π^3	31.006277	1.491450
$\sqrt{\pi}$	1.772454	0.24857
$\sqrt{2\pi}$	2.506628	0.39909
$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1.253314	0.09806
$\sqrt[3]{\pi}$	1.464592	0.16572
$\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$	1.611992	0.20736
e	2.718282	0.43429
e^2	7.389056	0.86859

常 数	n	$\lg n$
$\sqrt{e}$	1.648721	0.21715
$\sqrt[3]{e}$	1.395612	0.14476
$e^{\pi/2}$	4.810477	0.68219
e^{π}	23.140693	1.36438
$e^{2\pi}$	535.491656	2.72875
C①	0.577216	$\bar{1}.76134$
$\lg e$	0.434294	$\bar{1}.63778$
g_n	9.81	0.99167
g_n^2	96.2361	1.98334
$\sqrt{g_n}$	3.13209	0.49583
$\sqrt{2g_n}$	4.42945	0.64635
$\frac{1}{\pi}$	0.318310	$\bar{1}.50285$
$\frac{1}{2\pi}$	0.159155	$\bar{1}.20182$
$\frac{1}{3\pi}$	0.106103	$\bar{1}.02573$
$\frac{1}{4\pi}$	0.079577	$\bar{2}.90079$
$\frac{2}{\pi}$	0.636620	$\bar{1}.80388$
$\frac{3}{\pi}$	0.954930	$\bar{1}.97997$
$\frac{4}{\pi}$	1.273240	0.10491
$\frac{6}{\pi}$	1.909859	0.28100
$\frac{180}{\pi}$	57.295780°	1.75812
$\frac{10800}{\pi}$	3437.7468′	3.53627

常 数	n	$\lg n$
$\frac{648000}{\pi}$	206264.81	5.31443
$\frac{1}{\pi^2}$	0.101321	$\bar{1}.00570$
$\frac{1}{\pi^3}$	0.032252	$\bar{2}.508560$
$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0.564190	$\bar{1}.75143$
$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$	0.398942	$\bar{1}.60091$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0.797885	$\bar{1}.90194$
$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0.682784	$\bar{1}.83428$
$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$	0.620350	$\bar{1}.79264$
$\frac{1}{e}$	0.367879	$\bar{1}.56571$
$\frac{1}{e^2}$	0.135335	$\bar{1}.13141$
$\sqrt{\frac{1}{e}}$	0.606531	$\bar{1}.78285$
$\sqrt[3]{\frac{1}{e}}$	0.716531	$\bar{1}.85524$
$e^{-\pi/2}$	0.207880	$\bar{1}.31781$
$e^{-\pi}$	0.043214	$\bar{2}.63562$
$e^{-2\pi}$	0.001867	$\bar{3}.27125$
$\ln \pi$	1.144730	0.05870
$\ln 10$	2.302585	0.36222
$\frac{1}{g_n}$	0.10194	$\bar{1}.00833$
$\frac{1}{2g_n}$	0.050968	$\bar{2}.70730$
$\pi\sqrt{g_n}$	9.83976	0.99298
$\pi\sqrt{2g_n}$	13.91552	1.14350

① C为欧拉常数。

4·3 元素物理性能表[4]（见表1·1-18）

表1·1-18 元素的物理性能

符号	名称	原子序数	密度 (20℃) ($\times10^3kg/m^3$)	熔点 (101325Pa) (℃)	沸点 (101325Pa) (℃)	比热容 (20℃) [$\times10^3J/(kg\cdot K)$]	比潜热 ($\times10^3J/kg$)	导热系数 [$\times10^2W/(m\cdot K)$]	线胀系数 (0～100℃) ($\times10^{-6}$/℃)	电阻率 (0℃) ($\times10^{-2}\Omega\cdot mm^2/m$)	电阻温度系数 (0℃) (10^{-3}/℃)
Ac	锕	89	10.07	1050	3200	—	—	—	—	—	4.23
Ag	银	47	10.49	960.8	2210	0.234	104.7	4.187	19.7	1.59	4.29
Al	铝	13	2.6984	660.1	2500	0.900	396.1	2.219	23.6	2.635	4.23
Am	镅	95	11.7	≈1200	≈2500	—	—	—	50.8	145	—
Ar	氩	18	1.784×10^{-3}	－189.2	－185.7	0.523	28.05	1.7×10^{-4}	—	—	—
As	砷	33	5.73	814(36atm)	613(升华)	0.343	370.5	—	4.7	35.0	3.9
Au	金	79	19.32	1063	2966	0.131	67.41	2.973	14.2	2.065	3.5
B	硼	5	2.34	2300	3675	1.294	—	—	8.3(40℃)	1.8×10^{12}	—
Ba	钡	56	3.5	710	1640	0.285	—	—	19.0	50	—
Be	铍	4	1.84	1283	2970	1.884	1088.6	1.465	11.6(20～60℃)	6.6	6.7
Bi	铋	83	9.80	271.2	1420	0.123	52.34	0.084	13.4	106.8	4.2
Br	溴	35	3.12(液态)	－7.1	58.4	0.293	67.83	—	—	6.7×10^7	—
C	碳	6	2.25(石墨)	3727(高纯度)	4830	0.691	—	0.239	0.6～4.3	1375	0.6～1.2
Ca	钙	20	1.55	850	1440	0.649	217.71	1.256	22.3	3.6	3.33
Cd	镉	48	8.65	321.03	765	0.230	55.27	0.921	31.0	7.51	4.24
Ce	铈	58	6.77	804	3468	0.176	35.59	0.109	8.0	75.3(25℃)	0.87
Cl	氯	17	3.214×10^{-3}	－101	－33.9	0.486	90.43	0.72×10^{-4}	—	10×10^9	—
Co	钴	27	8.9	1492	2870	0.414	244.51	0.691	12.4	5.00(α)	6.6
Cr	铬	24	7.19	1903	2642	0.460	401.93	0.670	6.2	12.9	2.5
Cs	铯	55	1.90	28.6	685	0.218	15.91	—	97	19.0	4.96
Cu	铜	29	8.96	1083	2580	0.385	211.85	3.936	17.0	1.67～1.68(20℃)	4.3

（续）

符号	名称	原子序数	密度 (20℃) (×10³kg/m³)	熔点 (101325Pa) (℃)	沸点 (101325Pa) (℃)	比热容 (20℃) [×10³J/(kg·K)]	比潜热 (×10³J/kg)	导热系数 [×10²W/(m·K)]	线胀系数 (0～100℃) (×10⁻⁶/℃)	电阻率 (0℃) (×10⁻²Ω·mm²/m)	电阻温度系数 (0℃) (10⁻³/℃)
Dy	镝	66	8.56	1407	2300	0.172	105.51	0.100	7.7	56.0	1.19
Er	铒	68	9.16	1500	≈2600	0.167	102.58	0.096	10.0	107	2.01
Eu	铕	63	5.30	≈830	≈1430	0.163	69.06	—	—	81.3	4.30
F	氟	9	1.696×10^{-3}	−219.6	−188.2	0.754	42.29	—	—	—	—
Fe	铁	26	7.87	1537	2930	0.460	274.24	0.754	11.76	9.7(20℃)	6.0
Ga	镓	31	5.91	29.8	2260	0.331	80.22	0.293	18.3	13.7	3.9
Gd	钆	64	7.87	1312	≈2700	0.240	98.39	0.088	0.0～10.0	134.5	1.76
Ge	锗	32	5.323	958	2880	0.306	30.56	0.586	5.92	0.86×10^{6}～52×10^{6}	1.4
H	氢	1	0.0893×10^{-3}	−259.04	−252.61	14.44	62.8	17×10^{-4}	—	—	—
He	氦	2	0.1785×10^{-3}	−269.5 (103atm)	−268.9	5.234	3.496	13.90×10^{-4}	—	—	10^{21}(20℃)
Hf	铪	72	13.28	2225	5400	0.147	—	0.934	5.9	32.7～43.9	4.43
Hg	汞	80	13.546(液态)	−38.87	356.58	0.138	11.72	0.082	182	94.07	0.99
Ho	钬	67	8.8	1461	≈2300	0.163	104.25	—	—	87.0	1.71
I	碘	53	4.93	113.8	183	0.218	59.45	43.54×10^{-4}	93	1.3×10^{16}	—
In	铟	49	7.31	156.61	2050	0.239	28.47	0.239	33.0	8.2	4.9
Ir	铱	77	22.4	2454	5300	0.135	—	0.586	6.5	4.85	4.1
K	钾	19	0.87	63.2	765	0.741	60.71	1.005	83	6.55	5.4
Kr	氪	36	3.743×10^{-3}	−157.1	−153.25	—	—	0.879×10^{-4}	—	—	−0.39
La	镧	57	6.18	920	3470	0.201	72.43	0.138	5.1	56.8(20℃)	2.18
Li	锂	3	0.531	180	1347	3.308	436.26	0.712	56	8.55	4.6
Lu	镥	71	9.74	1730	1930	0.155	110.07	—	—	73.0	2.40
Mg	镁	12	1.74	650	1108	1.026	368.4±8.4	1.537	24.3	4.47	4.1

Mn	锰	25	7.43	1244	2150	0.481	266.70	0.05(−192℃)	37	185(20℃)	1.7
Mo	钼	42	10.22	2625	4800	0.276	≈292.24	1.424	4.9	5.17	4.71
N	氮	7	1.25×10^{-3}	−210	−195.8	1.034	25.96	25.12×10^{-5}	—	—	—
Na	钠	11	0.9712	97.8	892	1.235	115.14	1.340	71	4.27	5.47
Nb	铌	41	8.57	2468	5136	0.272	288.89	0.523~0.544	7.1	13.1~15.22	3.95
Nd	钕	60	7.00	1024	3180	0.188	49.32	0.13	7.4	64.3(25℃)	1.64
Ne	氖	10	0.8999×10^{-3}	−248.6	−246.0	—	—	0.00046	—	—	—
Ni	镍	28	8.90	1453	2732	0.44	308.99	0.921	13.4	6.84	5.9~8.0
Np	镎	93	20.25	637	—	—	—	—	50.8	145(20℃)	—
O	氧	8	1.429×10^{-3}	−218.83	−182.97	0.913	13.82	247.02×10^{-8}	—	—	—
Os	锇	76	22.5	2700	5500	0.13	—	—	5.7~6.57	9.66	4.2
P	磷	15	1.83	44.1	280	0.741	20.93	—	125	1×10^{17}	−0.456
Pa	镤	91	15.4	≈1230	≈4000	—	—	—	—	—	—
Pb	铅	82	11.34	327.3	1750	0.128	26.21	0.348	29.3	18.8	4.2
Pd	钯	46	12.16	1552	≈3980	0.245	143.19	0.703	11.8	9.1	3.79
Pm	钷	61	—	≈1000	≈2700	—	—	—	—	42±10(α)	4.6(α)
Po	钋	84	9.4	254	960	—	—	—	24.4	44±10(β)	7.0(β)
Pr	镨	59	6.77	≈935	3020	0.188	49.03	0.117	5.4	98(25℃)	1.71
Pt	铂	78	21.45	1769	4530	0.136	11.71	0.691	8.9	9.2~9.6	3.99
Pu	钚	94	19.0~19.8	639.5	3235	0.134	112.62	0.084	50.8	145(28℃)	−0.21
Ra	镭	88	5.0	700	1500	—	—	—	—	—	—
Rb	铷	37	1.53	38.8	680	0.335	27.21	—	90.0	11	4.81
Re	铼	75	21.03	3180	5900	0.138	—	0.712	6.7	19.5	4.73
Rh	铑	45	12.44	1960	4500	0.247(0℃)	—	0.879	8.3	≈6.02	4.35
Rn	氡	86	9.960×10^{-3}	−71	−61.8	—	—	—	—	—	—
Ru	钌	44	12.2	2400	4900	0.239	—	—	9.1	7.167	4.49

（续）

符号	名称	原子序数	密度 (20℃) ($\times10^3$kg/m^3)	熔点 (101325Pa) (℃)	沸点 (101325Pa) (℃)	比热容 (20℃) [$\times10^3$J/(kg·K)]	比潜热 ($\times10^3$J/kg)	导热系数 [$\times10^2$W/(m·K)]	线胀系数 (0～100℃) ($\times10^{-6}$/℃)	电阻率 (0℃) ($\times10^{-2}\Omega\cdot$mm^2/m)	电阻温度系数 (0℃) (10^{-3}/℃)
S	硫	16	2.07	115	444.6	0.733	38.94	26.42×10^{-4}	64	2×10^{23}(20℃)	—
Sb	锑	51	6.68	630.5	1440	0.205	160.35	0.188	8.5～10.8	39.0	5.1
Sc	钪	21	2.992	1539	2730	0.561	353.87	—	—	61(22℃)	—
Se	硒	34	4.808	220	685	0.322	68.66	$29.3\sim76.6\times10^{-4}$	37	12	4.45
Si	硅	14	2.329	1412	3310	0.678(0℃)	1808.7	0.837	2.8～7.2	10	0.8～1.8
Sm	钐	62	7.53	1052	1630	0.176	72.39	—	—	88.0	1.48
Sn	锡	50	7.298	231.91	2690	0.226	60.71	0.628	23	11.5	4.4
Sr	锶	38	2.60	770	1460	0.737	104.67	—	—	30.7	3.83
Ta	钽	73	16.67	2980	5400	0.142	159.10	0.544	6.55	13.1	3.85
Tb	铽	65	8.267	1356	2530	0.184	102.74	—	—	—	—
Tc	锝	43	11.46	≈2100	4600	—	—	—	—	—	—
Te	碲	52	6.24	450	990	0.197	133.98	0.059	17.0	$1\times10^3\sim3\times10^5$	—
Th	钍	90	11.724	1695	4200	0.142	<82.98	0.377	11.3～11.6	19.1	2.25
Ti	钛	22	4.508	1677	3260	0.519	435.43	0.151(α)	8.2	42.1～47.8	3.97
Tl	铊	81	11.85	≈304	1457	0.130	21.10	0.389	28.0	15～18.1	5.2
Tm	铥	69	9.325	1545	1700	0.159	109.02	—	—	—	—
U	铀	92	19.05	1132	3930	0.115	—	0.297	6.8～14.1	79.0	1.95
V	钒	23	6.1	1910	3400	0.532	—	0.310	8.3	29.0	2.18～2.76
W	钨	74	19.3	3380	5900	0.142	184.22	1.662	4.6(20℃)	24.8～26	2.8
Xe	氙	54	5.495×10^{-3}	-112	-108	—	—	—	—	5.1	4.82
Y	钇	39	4.475	1509	≈3200	0.297	192.59	5.192×10^{-4}	—	—	—
Yb	镱	70	6.966	824	1530	0.147	53.21	0.147	25	30.3	1.30
Zn	锌	30	7.134(25℃)	419.505	907	0.387	100.86	1.130	39.5	5.75	4.2
Zr	锆	40	6.507	1852±2°	3580	0.285	≈251.21	0.883(25℃)	5.85	39.7～40.5	4.35

注：1.数据旁括号内的温度指该数据的特定温度。

2.对液体元素，线胀系数栏的数据为体胀系数。

第2章 计 量 单 位

1 法定计量单位

1-1 单位

在对量进行测量时，用来作为比较基准的、具有一定大小的同一种量叫做单位。作为构成其他单位基础的单位，叫做基本单位。当确定了基本单位后，许多其他量的单位便可用物理学法则和规定推导出来，这种单位称为导出单位。于是便产生了基于基本单位的、有系统的单位体系，称之为单位制。

将习惯上公认数值为1的一种量称为计量单位。由国家法令形式规定强制使用或允许使用的计量单位称为法定计量单位。

1-2 国际单位制

1960年第11届国际计量大会（CGPM）通过了国际单位制（简称为SI）作为全世界通用的单位制。国际单位制单位是我国法定计量单位的基础，一切属于国际单位制的单位，都是我国的法定计量单位。

国际单位制构成

- 国际单位制（SI）
  - SI单位
    - SI基本单位（又称国际单位制的基本单位）
    - SI辅助单位（又称国际单位制的辅助单位）
    - SI导出单位
      - 具有专门名称的SI导出单位
      - 组合形式的SI导出单位
  - SI词头
  - SI单位的十进倍数单位

1-3 我国的法定计量单位

我国的法定计量单位包括：

1. 国际单位制（SI）的基本单位（见表1-2-1）

表1-2-1 SI基本单位

量的名称	单位名称	单位符号	定义
长度	米	m	米等于光在真空中1/299792458 s时间间隔内所经路径的长度〔第17届CGPM（1983）〕
质量	千克，（公斤）	kg	千克等于国际千克原器的质量〔第1届CGPM（1889）和第3届CGPM（1901）〕
时间	秒	s	秒是铯-133原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的9192631770个周期的持续时间〔第13届CGPM（1967），决议1〕
电流	安〔培〕	A	安培是在真空中，截面积可忽略的两根相距1m的无限长平行圆直导线内通以等量恒定电流时，若导线间相互作用力在每米长度上为 2×10^{-7}N，则每根导线中的电流为1A〔CIPM（1946，决议2。第9届CGPM（1948）批准〕
热力学温度	开〔尔文〕	K	开尔文是水三相点热力学温度的1/273.16〔第13届CGPM（1967），决议4〕
物质的量	摩〔尔〕	mol	摩尔是一系统的物质的量，该系统中所包含的基本单元数与0.012kg碳-12的原子数目相等。在使用摩尔时，基本单元应予指明，可以是原子、分子、离子、电子及其他粒子，或是这些粒子的特定组合〔第14届CGPM（1971），决议3〕

（续）

量的名称	单位名称	单位符号	定　　　义
发光强度	坎[德拉]	cd	坎德拉是一光源在给定方向上的发光强度，该光源发出的频率为540×10^{12}Hz 的单色辐射，且在此方向上的辐射强度为1/683W/sr〔第16届CGPM（1979），决议3〕

注：1.表中去掉方括号时为全称，去掉方括号及方括号中的字时为简称，下同。
　　2.圆括号中的符号为备用符号，下同。

2. 国际单位制的辅助单位（见表1·2-2）。

3. 国际单位制中具有专门名称的SI导出单位　导出单位是用基本单位和（或）辅助单位以代数形式所表示的单位，对某些SI导出单位国际计量大会通过了专门的名称和符号，见表1·2-3。

4. 可与国际单位制单位并用的其他单位(见表

表1·2-2　SI辅助单位

量的名称	单位名称	单位符号	定　　　义
平面角	弧　度	rad	弧度是一圆内两条半径之间的平面角，这两条半径在圆周上所截取的弧长与半径相等
立体角	球面度	sr	球面度是一立体角，其顶点位于球心，而它在球面上所截取的面积等于以球半径为边长的正方形面积

表1·2-3　具有专门名称的SI导出单位

量的名称	SI导出单位			
	名称	符号	表示式	
			用SI单位	用SI基本单位
频率	赫[兹]	Hz	—	s^{-1}
力，重力	牛[顿]	N	—	$m\cdot kg\cdot s^{-2}$
压力，压强，应力	帕[斯卡]	Pa	N/m^2	$m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-2}$
能[量]，功，热量	焦[耳]	J	$N\cdot m$	$m^2\cdot kg\cdot s^{-2}$
功率，辐[射能]通量	瓦　特	W	J/s	$m^2\cdot kg\cdot s^{-3}$
电荷[量]	库[仑]	C	—	$s\cdot A$
电压，电动势，电位，（电势）	伏[特]	V	W/A	$m^2\cdot kg\cdot s^{-3}\cdot A^{-1}$
电容	法[拉]	F	C/V	$m^{-2}\cdot kg^{-1}\cdot s^4\cdot A^2$
电阻	欧[姆]	Ω	V/A	$m^2\cdot kg\cdot s^{-3}\cdot A^{-2}$
电导	西[门子]	S	A/V	$m^{-2}\cdot kg^{-1}\cdot s^3\cdot A^2$
磁通[量]	韦[伯]	Wb	$V\cdot s$	$m^2\cdot kg\cdot s^{-2}\cdot A^{-1}$
磁通[量]密度，磁感应强度	特[斯拉]	T	Wb/m^2	$kg\cdot s^{-2}\cdot A^{-1}$
电感	亨[利]	H	Wb/A	$m^2\cdot kg\cdot s^{-2}\cdot A^{-2}$
摄氏温度	摄氏度	℃	—	K
光通量	流[明]	lm	—	$cd\cdot sr$
[光]照度	勒[克斯]	lx	lm/m^2	$m^{-2}\cdot cd\cdot sr$
[放射性]活度	贝可[勒尔]	Bq	—	s^{-1}
吸收剂量 比授[予]能 比释动能 吸收剂量指数	戈[瑞]	Gy	J/kg	$m^2\cdot s^{-2}$
剂量当量 剂量当量指数	希[沃特]	Sv	J/kg	$m^2\cdot s^{-2}$

1·2-4)

5。表1·2-4中的单位与国际单位制单位构成组合单位 例如kg/L，km/h；

表1·2-4 可与国际单位制单位并用的其他单位

量的名称	单位名称	单位符号
时间	分 [小]时 日，(天)	min h d
[平面]角	度 [角]分 [角]秒	(°) (′) (″)
体积，容积	升	L，(l)
质量	吨 原子质量单位	t u
旋转速度	转每分	r/min
长度	海里	n mile
速度	节	kn
能	电子伏	eV
级差	分贝	dB
线密度	特[克斯]	tex

6。SI单位的倍数单位 表1·2-5确定词头的名称及符号。词头用于构成SI单位的倍数单位，但不得单独使用。

表1·2-5 用于构成十进倍数单位的词头

因数	词头名称		符号
	原文(法)	中文	
10^{18}	exa	艾[可萨]	E
10^{15}	peta	拍[它]	P
10^{12}	téra	太[拉]	T
10^{9}	giga	吉[咖]	G
10^{6}	méga	兆	M
10^{3}	kilo	千	k
10^{2}	hecto	百	h
10^{1}	déca	十	da
10^{-1}	déci	分	d
10^{-2}	centi	厘	c
10^{-3}	milli	毫	m
10^{-6}	micro	微	μ
10^{-9}	nano	纳[诺]	n
10^{-12}	pico	皮[可]	p
10^{-15}	femto	飞[母托]	f
10^{-18}	atto	阿[托]	a

2 常用物理量及法定计量单位

2·1 空间、时间和周期的量和单位（见表1·2-6）

表1·2-6 常用的空间、时间和周期的量和单位

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
[平面]角	α，β，γ，θ，φ等	弧度	rad
立体角	Ω	球面度	sr
长度 宽度 高度 厚度 半径 直径 程长，距离	l，(L) b h δ，(d，t) r，R d，D s	米	m
面积	A，(S)	平方米	m^2
体积，容积	V	立方米	m^3
时间，时间间隔，持续时间	t	秒	s
角速度	ω	弧度每秒	rad/s
角加速度	α	弧度每二次方秒	rad/s^2

（续）

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
速度	u, v, ω, c	米每秒	m/s
加速度 重力加速度	a g	米每二次方秒	m/s²
周期	T	秒	s
时间常数	τ, (T)	秒	s
频率 转速	f, (ν) n	赫[兹] 每秒	Hz s^{-1}

2·2 力学的量和单位（见表1·2-7）

表1·2-7 常用的力学的量和单位

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
质量	m	千克（公斤）	kg
密度	ρ	千克每立方米	kg/m³
线密度	ρ_l	千克每米	kg/m
动量	p	千克米每秒	kg·m/s
转动惯量	I, (J)	千克二次方米	kg·m²
力 重力	F W, (P, G)	牛[顿]	N
力矩 转矩，力偶矩	M T	牛[顿]米	N·m
压力，压强 切应力，（剪应力）	p τ	帕[斯卡]	Pa
摩擦系数	μ, (f)	—	—
[动力]粘度	η, (μ)	帕[斯卡]秒	Pa·s
运动粘度	ν	二次方米每秒	m²/s
表面张力	γ, σ	牛[顿]每米	N/m
功 能[量] 势能，位能 动能	W, (A) E, (W) E_p, (V) E_k, (T)	焦[耳]	J
功率	P	瓦[特]	W

2·3 热学的量和单位（见表1·2-8）

表1·2-8 常用的热学的量和单位

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
热力学温度	T Θ	开[尔文]	K
摄氏温度	t, θ	摄氏度	℃

（续）

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
线[膨]胀系数	α_l	每开[尔文]	K^{-1}
热，热量	Q	焦[耳]	J
热流量	Φ	瓦[特]	W
热导率，（导热系数）	λ，k	瓦[特]每米开[尔文]	W/(m·K)
传热系数 [总]传热系数	h，α k，K	瓦特每平方米开[尔文]	$W/(m^2·K)$
热阻	R	开[尔文]每瓦[特]	K/W
热容	C	焦[耳]每开[尔文]	J/K
比热容	c	焦[耳]每千克开[尔文]	J/(kg·K)
熵	S	焦[耳]每开[尔文]	J/K
比熵	s	焦[耳]每千克开[尔文]	J/(kg·K)
内能 焓	U，(E) $H(I)$	焦[耳]	J
比内能 比焓	u，(e) h，(i)	焦[耳]每千克	J/kg

2·4 电学和磁学的量和单位（见表1·2-9）

表1·2-9 常用的电学和磁学的量和单位

量的名称	量符号	定义和说明	单位名称	单位符号
电流	I	在交流电技术中，用 i 表示电流的瞬时值	安[培]	A
电荷[量]	Q，(q)	电流对时间的积分	库[仑]	C
电荷[体]密度	ρ，(η)	$\rho=Q/V$，V—体积	库[仑]每立方米	C/m^3
电荷面密度	σ	$\sigma=Q/A$，A—面积	库[仑]每平方米	C/m^2
电场强度	E，(K)	$E=F/Q$，F—力	伏[特]每米	V/m
电位，（电势） 电位差，（电势差），电压 电动势	V，φ U E	在静电学中， $E=-\mathrm{grad}V$ E—电场强度 1、2两点间的电位差为从1点到2点的电场强度线积分 $$U=\varphi_1-\varphi_2=\int_1^2 E_s \mathrm{d}s$$ $\mathrm{d}s$—距离的微分 电源电动势是电源供给的能量被它输送的电荷除	伏[特]	V
电通[量]密度，电位移	D	一个矢量，其散度等于电荷体密度	库[仑]每平方米	C/m^2
电通[量]，电位移通量	Ψ	$\Psi=D\cdot A$，A—面积	库[仑]	C

（续）

量的名称	符号	定义和说明	单位名称	单位符号
电容	C	$C=Q/U$	法[拉]	F
介电常数，（电容率） 真空介电常数，（真空电容率）	ε，ϵ ε_0，ϵ_0	$\varepsilon=D/E$，E—电场强度 $\varepsilon_0=8.854187818\times10^{-12}$ F/m	法[拉]每米	F/m
相对介电常数，（相对电容率）	ε_r，ϵ_r	$\varepsilon_r=\varepsilon/\varepsilon_0$	—	—
电极化强度	P	$P=D-\varepsilon_0E$	库[仑]每平方米	C/m²
电偶极矩	p，(p_e)	$T=p\times E$，T—转矩	库[仑]米	C·m
电流密度	J(S，δ)	一个矢量，电流密度对一给定表面的积分等于流经该表面的电流	安[培]每平方米	A/m²
电流线密度	A，(α)	电流除以导电片宽度	安[培]每米	A/m
磁场强度	H	一个矢量，其旋度等于电流密度	安[培]每米	A/m
磁位差，（磁势差） 磁通势，磁动势	U_m F，F_m	$U_m=\int_1^2 H_s\mathrm{d}s$ ds—距离的微分 $F=\oint H_s\mathrm{d}s$ ds—距离的微分	安[培]	A
磁通[量]密度，磁感应强度	B	$F=QV\times B$ F—力 V—速度	特[斯拉]	T
磁通[量]	Φ	$\Phi=B\cdot A$ A—面积	韦[伯]	Wb
磁矢位（磁矢势）	A	一个矢量，其旋度等于磁通密度	韦[伯]每米	Wb/m
自感 互感	L M，L_{12}	$L=\Phi/I$ $M=\Phi_1/I_2$ Φ_1—穿过回路1的磁通 I_2—回路2的电流	亨[利]	H
耦合系数 漏磁系数	k，(κ) σ	$k=M/\sqrt{L_1L_2}$ $\sigma=1-k^2$	—	—
磁导率 真空磁导率	μ μ_0	$\mu=B/H$ $\mu_0=12.5663706144\times10^{-7}$ H/m	亨[利]每米	H/m
[面]磁矩	m	$T=m\times B$ T—转矩	安[培]平方米	A·m²
磁化强度	M，H_i	$M=(B/\mu_0)-H$	安[培]每米	A/m
磁极化强度	J，B_i	$J=B-\mu_0H$	特[斯拉]	T
电磁能密度	w	电磁场能量被体积除	焦[耳]每立方米	J/m³
坡印廷矢量	S	$S=E\times H$	瓦[特]每平方米	W/m²

（续）

量的名称	量符号	定义和说明	单位名称	单位符号
电磁波在真空中的传播速度	c，c_0	$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=2.99792458\times10^8\ m/s$	米每秒	m/s
〔直流〕电阻	R	$R=U/I$	欧〔姆〕	Ω
〔直流〕电导	G	$G=1/R$	西〔门子〕	S
电阻率	ρ	$\rho=RA/l$ A—面积 l—长度	欧〔姆〕米	Ω·m
电导率	γ，σ，κ	$\gamma=1/\rho$ κ用于电化学	西〔门子〕每米	S/m
磁阻	R_m	$R_m=U_m/\Phi$	每亨〔利〕	H^{-1}
磁导	Λ，(P)	$\Lambda=1/R_m$	亨〔利〕	H
相〔位〕差，相〔位〕移	φ	若两个正弦量x，y分别为 $x=X_m\cos\omega t$ $y=Y_m\cos(\omega t-\varphi)$ 则φ为二者的相位移	弧度	rad
阻抗，（复数阻抗） 阻抗模，（阻抗） 电抗 〔交流〕电阻	Z $\|Z\|$ X R	复数电压被复数电流除 $\|Z\|=\sqrt{R^2+X^2}$ 阻抗的虚部 阻抗的实部 $Z=\|Z\|e^{j\varphi}=R+jX$	欧〔姆〕	Ω
品质因数	Q	$Q=\dfrac{\|X\|}{R}$	—	—
导纳，（复数导纳） 导纳模，（导纳） 电纳 〔交流〕电导	Y $\|Y\|$ B G	$Y=\dfrac{1}{Z}$ $\|Y\|=\sqrt{G^2+B^2}$ 导纳的虚部 导纳的实部	西〔门子〕	S
功率 有功功率 无功功率 视在功率，（表观功率） 瞬时功率 功率因数	P Q，(P_q) S，(P_s) p λ	$P=IU$（直流时） 当$u=\sqrt{2}U\cos\omega t$ $i=\sqrt{2}I\cos(\omega t-\varphi)$时， $P=IU\lambda$ $Q=IU\sin\varphi$ $S=IU$ （I，U—有效值） $p=iu$ $\lambda=P/S=\cos\varphi$	瓦〔特〕 （电工中用乏） （电工中用伏安） —	W (var) (VA) —
电能〔量〕	W	有功功率对时间的积分	焦耳	J

2·5 光及有关电磁辐射的量和单位（见表1·2-10）

表1·2-10 常用的光及有关电磁辐射的量和单位

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
频率	f，ν	赫〔兹〕	Hz

（续）

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
角频率 圆频率	ω	弧度每秒 每 秒	rad/s s^{-1}
波 长	λ	米	m
波 数	σ	每 米	m^{-1}
辐〔射〕能	Q，W （U，Q_0）	焦〔耳〕	J
辐〔射〕能密度	w，（u）	焦〔耳〕每立方米	J/m^3
辐〔射〕功率 辐〔射能〕通量	P，Φ，（Φ_e）	瓦〔特〕	W
辐〔射〕强度	I，（I_e）	瓦〔特〕每球面度	W/sr
辐〔射〕亮度，辐射度	L，（L_e）	瓦〔特〕每球面度平方米	$W/(sr\cdot m^2)$
辐〔射〕出〔射〕度	M，（M_e）	瓦〔特〕每平方米	W/m^2
辐〔射〕照度	E，（E_e）	瓦〔特〕每平方米	W/m^2
发光强度	I，（I_v）	坎〔德拉〕	cd
光通量	Φ，（Φ_v）	流〔明〕	lm
光 量	Q，（Q_v）	流〔明〕秒	lm·s
〔光〕亮度	L，（L_v）	坎〔德拉〕每平方米	cd/m^2
光出射度	M，（M_v）	流〔明〕每平方米	lm/m^2
〔光〕照度	E，（E_v）	勒〔克斯〕	lx
曝光量	H	勒〔克斯〕秒	lx·s
光视效能	K	流〔明〕每瓦〔特〕	lm/W
线性衰减系数 线性消光系数 线性吸收系数	μ，μ_1 a	每 米	m^{-1}
摩尔吸收系数	κ	平方米每摩尔	m^2/mol
折射率	n	—	—

2·6 声学的量和单位（见表1·2-11）

表1·2-11 常用的声学的量和单位

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
周 期	T	秒	s
频 率	f，（ν）	赫〔兹〕	Hz
波 长	λ	米	m
密 度	ρ	千克每立方米	kg/m^3
静压〔力〕 声 压	P_0，P_s p	帕〔斯卡〕	Pa
质点速度	u	米每秒	m/s

（续）

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
声速	c	米每秒	m/s
声[源]功率 声能通量	W, P Φ	瓦特	W
声阻抗率 [声]特性阻抗	Z_s Z_c	帕[斯卡]秒每米	Pa·s/m
声阻抗	Z_a	帕[斯卡]秒每立方米	Pa·s/m³
隔声量，传声损失	R	分贝	dB
响度级	L_N	方	phon
吸声量	A	平方米	m²

2·7 物理化学和分子物理学的量和单位(见表1·2-12)

表1·2-12 常用的物理化学和分子物理学的量和单位

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
物质的量	n，(ν)	摩[尔]	mol
摩尔质量	M	千克每摩[尔]	kg/mol
摩尔体积	V_m	立方米每摩[尔]	m³/mol
摩尔内能 摩尔焓	U_m，(E_m) H_m	焦[耳]每摩[尔]	J/mol
摩尔热容	C_m	焦[耳]每摩[尔]开[尔文]	J/(mol·K)
摩尔熵	S_m	焦[耳]每摩[尔]开[尔文]	J/(mol·K)
物质B的浓度，物质B的物质的量浓度	c_B	摩[尔]每立方米	mol/m³
物质B的质量摩尔浓度	b_B，m_B	摩[尔]每千克	mol/kg
扩散系数	D	平方米每秒	m²/s
热扩散系数	D_T	平方米每秒	m²/s
元电荷	e	库[仑]	C
法拉第常数	F	库[仑]每摩[尔]	C/mol
离子强度	I	摩[尔]每千克	mol/kg

2·8 原子物理学、核物理学及固体物理的量和单位（见表1·2-13）

表1·2-13 常用的原子物理学、核物理学及固体物理的量和单位

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
电子[静止]质量 质子[静止]质量 中子[静止]质量	m_e m_p m_n	千克 原子质量单位	kg u
玻尔半径	a_0	米	m
粒子或原子核的磁矩	μ	安[培]二次方米	A·m²

（续）

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
核四极矩	Q	二次方米	m^2
核半径	R	米	m
〔经典〕电子半径	r_e	米	m
核的结合能	E_B	焦〔耳〕 电子伏	J eV
〔放射性〕活度	A	贝可〔勒尔〕	Bq
衰变常数	λ	每秒	s^{-1}
半衰期	$T_{1/2}$	秒 分 〔小〕时 年	s min h a
洛伦兹系数	L	二次方伏〔特〕每二次方开〔尔文〕	V^2/K^2
霍尔系数	A_H, R_H	立方米每库〔仑〕	m^3/C
功函数	Φ, W	焦〔耳〕 电子伏	J eV
里查逊常数	A	安〔培〕每平方米二次方开〔尔文〕	$A/(m^2 \cdot K^2)$
弛豫时间 载流子寿命	τ τ, τ_n, τ_p	秒	s
磁通量子	Φ_0	韦〔伯〕	Wb

2·9 核反应和电离辐射的量和单位（见表1·2-14）

表1·2-14 常用的核反应和电离辐射的量和单位

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
反应能	Q	焦〔耳〕 电子伏	J eV
辐射能	E_R	焦〔耳〕 电子伏	J eV
截面	σ	平方米	m^2
粒子注量	Φ	每平方米	m^{-2}
能注量	Ψ	焦〔耳〕每平方米	J/m^2
质量衰减系数	μ/ρ, μ_m	平方米每千克	m^2/kg
半厚度	$d_{1/2}$	米	m
总质量阻止本领	S/ρ, (S_m)	焦〔耳〕平方米每千克 电子伏平方米每千克	$J \cdot m^2/kg$ $eV \cdot m^2/kg$
迁移率	b, μ	平方米每伏秒	$m^2/(V \cdot s)$
形成每对离子平均损失的能量	W	焦〔耳〕 电子伏	J eV
复合系数	α	立方米每秒	m^3/s

（续）

量的名称	量符号	单位名称	单位符号
扩散系数，粒子数密度的扩散系数	D，D_n	平方米每秒	m^2/s
慢化密度	q	每秒立方米	$s^{-1}\cdot m^{-3}$
对数能降	u		
平均自由程	l，λ	米	m
授〔予〕能	ε	焦〔耳〕	J
吸收剂量	D	戈〔瑞〕	Gy
		拉德	rad
剂量当量	H	希〔沃特〕	Sv
		雷姆	rem
比释动能	K	戈〔瑞〕	Gy
		拉德	rad
照射量	X	库〔仑〕每千克	C/kg
		伦琴	R

3 常见错用计量单位符号（见表1·2-15）

表1·2-15 常见错用计量单位符号

量的名称	法定计量单位		错误或不恰当的符号	注
	名称	符号		
长度	千米	km	KM，Km	字母应小写
	米	m	公尺	非规定名称
	厘米	cm	公分	非规定名称
	毫米	mm	m/m，MM	不符合国际规定
	微米	μm	μ mμ	μ只是SI词头 不符合国际规定
	纳米	nm	mμm	词头不能重叠
面积	平方米	m^2	平米	非规定名称
体积，容积	立方米	m^3	cum 立米	不符合国际规定 非规定名称
	升	L，(l)	公升，立升，立	非规定名称
	毫升	mL，ml	cc，c·c	不符合国际规定
时间	〔小〕时	h	hr	不符合国际规定
	分	min	(′)	不符合国际规定
	秒	s	(″)	不符合国际规定

（续）

量的名称	法定计量单位		错误或不恰当的符号	注
	名　称	符　号		
质　量	吨	t	T 公吨，米制吨	字母应小写 非规定名称
	千　克	kg	KG，Kg kgs	字母应小写 单位符号无复数形式
	克	g	kgm，kilog 公　分	不符合国际规定 非规定名称
力，重力	牛[顿]	N	kg kp nt	kg不是力的单位 不符合国际规定 不符合国际规定
力　矩	牛[顿]米	N·m	牛顿·米	牛顿不是单位符号
功　率	吉瓦[特]	GW	kMW	词头不得重叠使用
电　容	皮法[拉]	pF	μμF PF	词头不得重叠使用 表示的因数小于10^6的词头，符号字母应小写
频　率	兆　赫 赫[兹]	MHz Hz	MC hz	不符合国际规定 具有专门名称的SI导出单位，其符号第一个字母应大写
热力学温度 摄氏温度	开[尔文] 摄氏度	K ℃	°K 度	国际上已改 非规定名称

4　常用单位换算

4·1　空间、时间和周期单位换算

4·1·1　平面角

1度（°）＝π/180rad

1[角]分（′）＝(1/60)°

1[角]秒(″)＝(1/60)′

1冈(gon)＝π/200rad

4·1·2　长度

1海里(nmile)＝1852m

1天文单位(A)＝1.49597870×10^{11}m

1秒差距(pc)＝3.0857×10^{16}m

1埃(Å)＝10^{-10}m

1光年(l·y·)＝9.46053×10^{15}m

1[市]里＝500m

1费密(fermi)＝10^{-15}m

1码(yd)＝3英尺(ft)＝0.9144m

1英寸(in)＝1000密耳(mil)＝0.0254m

1英尺(ft)＝12英寸(in)＝0.3048m

1英里(mile)＝1760码(yd)＝1609.344m

4·1·3　面积

1公顷(ha)＝100公亩(a)＝10^4m^2

1亩＝10[市]分＝100[市]厘＝10^4/15m^2

1平方英里（mile^2)＝640英亩(acre)

＝2.58999×10^6m^2

1英亩(acre)＝43560平方英尺(ft^2)

＝4046·86m^2

1靶恩(b)＝10^{-28}m^2

1圆密耳＝5.0671×10^{-10}m^2

4·1·4　体积、容积

1升(L，l)＝1立方分米(dm^3)

＝10^3立方厘米(cm^3)＝10^{-3}m^3

1立方码(yd^3)＝0.76455m^3

1英制加仑(UKgal)＝1.201美制加仑(USgal)

＝4.546×10^{-3}m^3

1立方英尺(ft^3)＝0.0283168m^3

1立方英寸(in^3)＝1.63871×10^{-5}m^3

4·1·5 时间

1日(d) = 86400 s

1[小]时(h) = 3600 s

4·1·6 角速度、转速

1转每分 (r/min) = 0.01667转每秒(r/s)
= 360度每分(°/min)
= (π/30)rad/s

4·1·7 速度

1千米每小时(km/h) = 0.277778 m/s

1英里每小时(mile/h) = 0.44704 m/s

1英尺每秒 (ft/s) = 0.3048 m/s

1节(kn) = 1852 m/h = 0.514444 m/s

4·1·8 加速度

1伽(Gal) = 0.01 m/s²

1标准重力加速度(gn) = 9.80665 m/s²

4·2 力学单位换算

4·2·1 质量

1吨(t) = 1000kg

1原子质量单位(u) = 1.6605655 × 10⁻²⁷kg

1工程质量单位 = 9.80665kg

1米制克拉 = 0.2 g = 2.0 × 10⁻⁴kg

1英吨(ton) = 2240磅(lb) = 1106.047kg

1短吨(shton) = 2000磅(lb) = 907.185kg

1格令(gr) = 6.47989 × 10⁻⁵kg

4·2·2 密度

1吨每立方米(t/m³) = 1000kg/m³

1千克每升(kg/L) = 1000kg/m³

1克每立方厘米(g/cm³) = 1000kg/m³

1磅每立方英尺(lb/ft³) = 16.0185kg/m³

1磅每立方英寸(lb/in³) = 27679.968kg/m³

4·2·3 线密度

1特克斯(tex) = 10⁻⁶kg/m

1磅每英尺(lb/ft) = 1.48816kg/m

1磅每英寸(lb/in) = 17.858kg/m

4·2·4 力、重力

1达因(dyn) = 10⁻⁵N

1千克力(kgf) = 9.80665N

1磅力(lbf) = 4.44822N

1磅达(pdl) = 0.138255N

4·2·5 力矩、转矩

1达因厘米(dyn·cm) = 10⁻⁷N·m

1千克力米(kgf·m) = 9.80665N·m

1磅力英尺(lbf·ft) = 1.35582N·m

4·2·6 压力、压强

1巴(bar) = 10⁵Pa

1标准大气压(atm) = 1.01325 × 10⁵Pa

1工程大气压 (at) = 1 kgf/cm² = 9.80665 × 10⁴Pa

1毫米汞柱(mmHg) = 1托(Torr) = 133.322Pa

1毫米水柱(mmH₂O) = 9.80665Pa

1磅力每平方英尺(lbf/ft²) = 47.8803Pa

1磅力每平方英寸(lbf/in²) = 6.89476 × 10³Pa

4·2·7 [动力]粘度

1泊(P) = 0.1Pa·s

1千克力秒每平方米 (kgf·s/m²) = 9.80665Pa·s

1磅力秒每平方英尺 (lbf·s/ft²) = 47.8803Pa·s

1磅力秒每平方英寸 (lbf·s/in²) = 6.89476 × 10³Pa·s

4·2·8 [运动]粘度

1斯[托克斯](St) = 10⁻⁴m²/s

1平方英尺每秒 (ft²/s) = 9.2903 × 10⁻²m²/s

4·2·9 功和能

1电子伏[特](eV) = 1.60219 × 10⁻¹⁹J

1尔格(erg) = 10⁻⁷J

1千瓦小时(kW·h) = 3.6 × 10⁶J

1千克力米(kgf·m) = 9.80665J

1马力小时 = 2.64779 × 10⁶J

1英马力小时(hp·h) = 2.68452 × 10⁶J

4·2·10 功率

1焦耳每秒 (J/s) = 1W

1千克力米每秒(kgf·m/s) = 9.80665W

1马力 = 735.499W

1英马力(hp) = 745.700W

4·3 热学单位换算

4·3·1 热量

1国际蒸汽表卡(cal) = 4.1868J

1热化学卡(cal_{th}) = 4.184J

1 15℃卡 (cal15) = 4.1855J

1英热单位(Btu) = 1.055 × 10³J

4·3·2 热导率

1国际蒸汽表卡每秒厘米开[尔文](cal/(s·cm·K)) = 418.68W/(m·K)

1热化学卡每秒厘米开[尔文](calth/(s·cm·K))=418.4W/(m·K)

4·3·3 传热系数

1国际蒸汽表卡每秒平方厘米开[尔文]
(cal/(s·cm²·K))=4.868×10⁴W/(m²·K)

1热化学卡每秒平方厘米开[尔文]
(cal_{th}/(s·cm²·K))=4.184×10⁴W/(m²·K)

4·3·4 比热容、比熵

1国际蒸汽表卡每克开[尔文](cal/(g·K))=4186.8J/(kg·K)

1热化学卡每克开[尔文](cal_{th}/(g·K))=4184J/(kg·K)

4·3·5 比内能

1国际蒸汽表卡每克(cal/g)=4.1868×10³J/kg

1热化学卡每克(cal_{th}/g)=4.184×10³J/kg

4·3·6 温标

表示温度数值时：

$$摄氏温度值(℃)=热力学温度值(K)-273.15$$

$$华氏温度值(°F)=\frac{9}{5}热力学温度值(K)-459.67$$

$$摄氏温度值(℃)=\frac{5}{9}[华氏温度值(°F)-32]$$

表示温度差和温度间隔时：

$$1℃=1K$$

$$1°F=\frac{5}{9}℃$$

4·4 电学和磁学单位换算

4·4·1 电荷

1安[培]小时(A·h)=3.6×10³C

4·4·2 磁场强度、磁化强度

1奥斯特(Oe)=(1000/4π)A/m

4·4·3 磁感应强度、磁通[量]密度

1高斯(Gs)=10⁻⁴T

4·4·4 磁通[量]

1麦克斯韦(Mx)=10⁻⁸Wb

4·5 光学单位换算

1流[明]小时(lm·h)=3600lm·s

1尼特(nt)=1cd/m²

1熙提(sb)=10⁴cd/m²

1辐透(ph)=10⁴lx

1英尺烛光(lm/ft²)=10.76lx

4·6 核反应和电离辐射单位换算

1居里(Ci)=3.7×10¹⁰Bq

1伦琴(R)=2.58×10⁻⁴C/kg

1拉德(rad)=10⁻²Gy

1雷姆(rem)=10⁻²Sv

1焦耳每千克(J/kg)=1Sv

5 分贝与奈培

5·1 分贝

分贝（代号dB）表示两个功率值之比的以10为底的对数乘以10，即

$$分贝(dB)=10\lg\frac{P_2}{P_1}$$

式中 P为功率。

在数值上，1分贝(dB)为1贝尔(B)的1/10（基本的贝尔单位很少用）。

5·2 奈培

奈培（代号Np）表示两个功率值之比的以e为底的对数乘以1/2，即

$$奈培(Np)=\frac{1}{2}\ln\frac{P_2}{P_1}$$

5·3 分贝、奈培与电压比、电流比

（1）$Z_1=Z_2$时

$$分贝(dB)=20\lg\frac{U_2}{U_1}=20\lg\frac{I_2}{I_1}$$

$$奈培(Np)=\ln\frac{U_2}{U_1}=\ln\frac{I_2}{I_1}$$

（2）$Z_1\neq Z_2$时

$$分贝(dB)=20\lg\frac{U_2}{U_1}+10\lg\frac{|Z_1|}{|Z_2|}+10\lg\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}$$

$$=20\lg\frac{I_2}{I_1}+10\lg\frac{|Z_2|}{|Z_1|}+10\lg\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}$$

$$奈培(Np)=\ln\frac{U_2}{U_1}+\frac{1}{2}\ln\frac{|Z_1|}{|Z_2|}+\frac{1}{2}\ln\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$$

$$=\ln\frac{I_2}{I_1}+\frac{1}{2}\ln\frac{|Z_2|}{|Z_1|}+\frac{1}{2}\ln\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}$$

式中　U为电压；I为电流；$Z=|Z|e^{j\varphi}$。

5·4　分贝与奈培之间的换算

1dB＝0.1151Np

1Np＝8.6861dB

第3章 标　　准

1　标准的分级和代号

1·1　标准和标准化

标准是对重复性事物和概念所做的统一规定。它以科学、技术和实践经验的综合成果为基础，经有关方面协商一致，由主管机构批准，以特定形式发布，作为共同遵守的准则和依据。

标准化是在经济、技术、科学及管理等社会实践中，对重复性事物和概念通过制定、发布和实施标准，达到统一，以获得最佳秩序和社会效益的过程。

1·2　标准的分级和代号

标准根据其适用领域和有效范围的不同，可以分为不同的级别。各国由于社会经济条件不同，有不同的分级方法。大多数国家的标准分为国际标准、国家标准和企业标准三级。

按照1989年4月1日正式施行的《中华人民共和国标准化法》的规定，我国的标准分为国家标准、行业标准、地方标准和企业标准四级。较过去的标准体制有如下变化：首先是，取消了"部（专业）标准"确立了"行业标准"；其次是，取消了"地方企业标准"，分别确立了"地方标准"和"企业标准"。

1．国家标准　由国务院标准化行政主管部门编制计划，组织草拟，统一审批、编号、发布。是对全国经济技术发展有重大意义，必须在全国范围内统一的标准。国家标准是我国标准体系中的主体。

国家标准代号由大写汉语拼音字母构成：

强制性国家标准代号为"GB"；

推荐性国家标准代号为"GB/T"。

国家标准的编号由国家标准的代号、国家标准发布的顺序号和国家标准发布的年号构成。

示例：GB×××××—××

GB/T×××××—××

2．行业标准　对没有国家标准而又需要在全国某个行业范围内统一的技术要求，可以制定行业标准。行业标准由国务院有关行政主管部门制定，并报国务院标准化行政主管部门备案，在公布国家标准之后，该项行业标准即行废止，行业标准不得与国家标准相抵触。目前，我国已制定的专业（部）标准，都将由各标准制定部门清理整顿，向行业标准转化。

行业标准的编号由行业标准代号、标准顺序号及年号组成。

示例：强制性行业标准编号

－－　××××—××

标准批准年号

标准顺序号

强制性行业标准代号

推荐性行业标准代号为－－/T

强制性行业标准代号见表1·3-1。

3．地方标准　对没有国家标准和行业标准而又需要在省、自治区、直辖市范围内统一的工业产品的安全、卫生要求，可以制定地方标准。地方标准由省、自治区、直辖市人民政府标准化行政主管部门编制计划，组织草拟，统一审批、编号、发布，并报国务院标准化行政主管部门和国务院有关行政主管部门备案。

地方标准在相应的国家标准或行业标准实施后，自行废止。

强制性地方标准代号由汉语拼音字母"DB"加上省、自治区、直辖市行政区划代码前两位数再加斜线组成，地方标准编号由地方标准代号、地方标准顺序号和年号三部分组成。

示例　DB××/×××—××

推荐性地方标准的代号为DB××/T。

我国省、自治区、直辖市代码见表1·3-2。

4．企业标准　企业生产的产品没有国家标准、行业标准和地方标准的，应当制定企业标准，作为组织生产的依据。企业标准由企业组织制定，并按省、自治区、直辖市人民政府的规定备案。

对已有国家标准、行业标准或者地方标准的，鼓励企业制定严于国家标准、行业标准或者地方标

表1·3-1 强制性行业标准代号

代号	行业名称	归口管理部门	代号	行业名称	归口管理部门
CB	船舶	中国船舶工业总公司	MT	煤炭	中国统配煤炭工业总公司
CH	测绘	国家测绘局			
CY	新闻出版	国家新闻出版署	MZ	民政工作	民政部
DA	档案工作	国家档案局	NY	农业	农业部
DL	电力	原能源部	QB	轻工	原轻工业部
DZ	地质矿产	地质矿产部	QC	汽车	中国汽车工业总公司
EJ	核工业	中国核工业总公司	QJ	航天	航空航天工业部
FZ	纺织	原纺织工业部	SC	水产	农业部
GA	公共安全	公安部	SH	石油化工	中国石油化工总公司
GY	广播电影电视	广播电影电视部	SJ	电子	电子工业部
HB	航空	航空航天工业部	SL	水利	水利部
HG	化工	化学工业部	SN	商检	国家进出口商品检验局
HY	海洋工作	原国家海洋局	SY	石油天然气	原能源部
JB	机械（含机械电工、仪器仪表等）	机械工业部	TB	铁路运输	铁道部
			TD	土地管理	国家土地管理局
JC	建材	原国家建筑材料工业局	WJ	兵工民品	中国兵器工业总公司
JR	金融工作	中国人民银行	YB	黑色冶金	冶金工业部
JT	公路、水路运输	交通部	YC	烟草	中国烟草总公司
JY	教育	国家教育委员会	YD	通信	邮电部
LD	劳动和劳动安全	劳动部	YS	有色金属	中国有色金属工业总公司
LY	林业	林业部			
MH	民用航空	中国民用航空局	YY	医药	国家医药管理局

表1·3-2 省、自治区、直辖市代码表

名称	代码	名称	代码
北京市	110000	湖北省	420000
天津市	120000	湖南省	430000
河北省	130000	广东省	440000
山西省	140000	广西壮族自治区	450000
内蒙古自治区	150000	海南省	460000
辽宁省	210000	四川省	510000
吉林省	220000	贵州省	520000
黑龙江省	230000	云南省	530000
上海市	310000	西藏自治区	540000
江苏省	320000	陕西省	610000
浙江省	330000	甘肃省	620000
安徽省	340000	青海省	630000
福建省	350000	宁夏回族自治区	640000
江西省	360000	新疆维吾尔自治区	650000
山东省	370000	台湾省	710000
河南省	410000		

准要求的企业标准，在企业内部适用。

企业标准代号、编号：

Q/ ××× ×××—××

年号

顺序号

企业代号

企业标准代号

×××企业标准代号

企业代号可用汉语拼音字母或阿拉伯数字或两者兼用组成。按中央所属企业和地方企业分别由国务院有关行政主管部门和省、自治区、直辖市政府标准化行政主管部门会同同级有关行政主管部门规定。

2　国际标准和国外先进标准

2·1　国际标准

国际标准是指国际标准化组织（ISO）、国际电工委员会（IEC）所制定的标准，以及ISO所出版的《国际标准题内关键词索引》（KWIC Index）中收录的其他国际组织制定的标准等。部分国际组织及标准名称、代号见表1·3-3。

表1·3-3　部分国际组织或标准名称、代号

代　号	国际组织或标准名称
ISO	国际标准化组织标准
IEC	国际电工委员会标准
BIPM	国际计量局
BISFA	国际人造纤维标准化局
CEE	国际电气设备合格认证委员会
CCITT	国际电报电话咨询委员会
CCC	关税合作理事会
CCIR	国际无线电咨询委员会
CIE	国际照明委员会
CISPR	国际无线电干扰特别委员会
IATA	国际空运协会
ICAO	国际民航组织
IAEA	国际原子能机构
ICRP	国际射线防护委员会
IFLA	国际图书馆员协会和图书馆联合会
IIR	国际制冷学会
OIML	国际法定计量组织
UIC	国际铁路联盟
WHO	世界卫生组织
WIPO	世界知识产权组织

2·2　国外先进标准

国外先进标准是指国际上有权威的区域性标准、世界主要经济发达国家的国家标准、行业标准和企业标准以及通行的团体标准等。部分国外先进标准或发布组织名称、代号见表1·3-4。

表1·3-4　部分国外先进标准或发布组织名称、代号

代　号	标准名称或发布组织
CEN	欧洲标准化委员会
CENELEC	欧洲电工标准化委员会
EBU	欧洲广播联盟
ANSI	美国国家标准
BS	英国国家标准
DIN	德国国家标准
CSA	加拿大国家标准
NF	法国国家标准
ГОСТ	前苏联国家标准
JIS	日本工业标准
API	美国石油学会标准
ASME	美国机械工程师协会标准
ASTM	美国试验与材料协会标准
EIA	美国电子工业协会标准
MIL	美国军用标准
SMPTE	美国电影电视工程师协会标准
UL	美国保险商试验所安全标准
NEMA	美国电气制造商协会标准

3　现行部分电气国家标准目录

3·1　常用的电工国家标准目录（见表1·3-5）

表1·3-5　常用的电工国家标准目录

标准代号	标准名称	标准代号	标准名称
GB5094—85	电气技术中项目代号	GB12113—89	接触电流和接地线电流的测量
GB2900.1～48—82、83、84、85、89	电工名词术语	GB1980—80	电气设备额定频率
GB4776—84	电气安全名词术语	GB11804—89	电工电子产品环境条件术语
GB156—80	额定电压	GB4797.1～4—84、86、89	电工电子产品自然环境条件
GB3926—83	中频设备额定电压	GB4798.1—86	电工电子产品应用环境条件　贮存
GB3805—83	安全电压	GB10593.1～3—89、90	电工电子产品环境参数测量方法
GB999—88	直流电力牵引额定电压	GB5169.1～8—85	电工电子产品着火危险试验
GB762—80	电气设备额定电流		

（续）

标准代号	标准名称	标准代号	标准名称
GB3785—83	声级计的电声性能及测量方法	GB4859—84	电气设备的抗干扰特性基本测量方法
GB4064—83	电气设备安全设计导则	GB1984—89	交流高压断路器
GB1497—85	低压电气基本标准	GB1985—89	交流高压隔离开关和接地开关
GB2421~2424—81、82、85、87、89、90	电工电子产品基本环境试验规程	GB4706.1~23—84、86、88	家用和类似用途电器的安全
GB7157—87	电烙铁	GB5465.1—85	电气设备用图形符号编制原则
GB7158—87	电烙铁的安全要求	GB5465.2—85	电气设备用图形符号
GB1207—86	电压互感器	GB5489—85	印制板制图
GB1208—87	电流互感器	GB6988—86	电气制图
GB7260—87	不间断电源设备	GB7356—87	电气系统说明书用简图的编制
GB4365—84	无线电干扰名词术语	GB4728.1~13—84、85	电气图用图形符号
GB3907—83	工业无线电干扰基本测量方法		
GB11604—89	高压电器设备无线电干扰测试方法	GB7159—87	电气技术中的文字符号制定通则

3·2 常用的电子基础、信息技术、仪器仪表国家标准目录（见表1·3-6）

表1·3-6 常用的电子基础、信息技术、仪器仪表国家标准目录

标准代号	标准名称	标准代号	标准名称
GB1956—89	电子管型号命名方法	GB/T12633—90	压电晶体性能测试术语
GB11279—89	电子元器件环境试验使用导则	GB/T12634—90	压电晶体电弹常数测试方法
GB249—89	半导体分立器件型号命名方法	GB11478—89	摄像管总规范
GB11499—89	半导体分立器件文字符号	GB11479—89	摄像管空白详细规范
GB6801—86	半导体器件基准测试方法	GB11480—89	摄像管测试方法
GB12560—90	半导体器件 分立器件分规范	GB12571—90	单色显示管测试方法
GB/T12562—90	PIN二极管空白详细规范	GB12570—90	单色显示管空白详细规范
GB/T12561—90	发光二极管空白详细规范	GB1988—89	信息处理 信息交换用七位编码字符集
GB12565—90	半导体器件 光电子器件分规范		
GB9178—88	集成电路术语	GB11383—89	信息处理 信息交换用八位代码结构和编码规则
GB3430—89	半导体集成电路型号命名方法		
GB3431.1~2—82	半导体集成电路文字符号	GB1526—89	信息处理 数据流程图、程序流程图、系统流程图、程序网络图和系统资源图的文件编制符号及约定
GB3432.1~4—89	半导体集成电路 TTL 电路系列和品种		
GB11497.1~2—89	半导体集成电路CMOS电路系列和品种	GB/T11457—89	软件工程术语
		GB/T12504—90	计算机软件质量保证计划规范
GB3436—86	半导体集成电路运算放大器系列和品种	GB/T12505—90	计算机软件配置管理计划规范
		GB12354—90	电子计算机外围设备型号命名方法
GB9425—88	半导体集成电路运算放大器空白详细规范	GB12627—90	软磁盘驱动器通用技术条件
		GB12628—90	硬磁盘驱动器通用技术条件
GB4719—84	半导体集成电路新产品定型鉴定的程序规则	GB9361—88	计算机场地安全要求
		GB2887—89	计算机场地技术条件
GB4855—84	半导体集成电路线性放大器系列和品种	GB4793—84	电子测量仪器安全要求
		GB11463—89	电子测量仪器可靠性试验
GB5839—86	电子管和半导体器件额定值制	GB11464—89	电子测量仪器术语
GB4589.1—89	半导体器件 分立器件和集成电路总规范	GB11461—89	频谱分析仪通用技术条件
		GB11462—89	频谱分析仪测试方法
GB3187—82	可靠性基本名词术语及定义	GB12114—89	高频信号发生器通用技术条件
GB7289—87	可靠性、维修性与有效性预计报告编写指南	GB12115—89	高频信号发生器测试方法
		GB12116—89	模拟电子电压表通用技术条件
GB1772—79	电子元器件失效率试验方法	GB12117—89	模拟电子电压表测试方法

（续）

标准代号	标准名称	标准代号	标准名称
GB12180—90	低频信号发生器测试方法	GB12160—90	引伸计标定与分级方法
GB12181—90	低频信号发生器通用技术条件	GB11606.1～17—89	分析仪器环境试验方法
GB11150—89	电能表检测装置		
GB12058.1～14—89	光学和光学仪器环境试验方法	GB12519—90	分析仪器通用技术条件

3·3 常用的通信、广播国家标准目录（见表1·3-7）

表1·3-7 常用的通信、广播国家标准目录

标准代号	标准名称	标准代号	标准名称
GB4958—88	地面无线电接力系统所用设备的测量方法	GB12193—90	移动通信调频无线电话接收机测量方法
GB6933—86	短波单边带发射机电性能测量方法	GB11410—89	短波广播网覆盖技术规定
GB6934—86	短波单边带接收机电性能测量方法	GB12047—89	多节目静止图象广播系统
GB12572—90	发射机频率容限	GB7400.1～12—87	广播电视名词术语
GB11299.1～15—89	卫星通信地球站无线电设备测量方法	GB12060—89	声系统设备 一般术语解释和计算方法
GB12046—89	无线电发射的标识及必要带宽的确定	GB4311.1～4—84、87	调频广播
GB12048—89	数字网内时钟和同步设备的进网要求	GB4312.1～3—84、87	调频广播发射机技术参数和测试方法
GB11065—89	长途电话全自动对端设备技术要求和测试方法	GB6114—85	广播接收机干扰特性测量方法
		GB6113—85	调频广播接收机测量方法
GB11819—89	光纤的一般要求	GB1778—79	广播录音机
GB11820—89	市内光缆通信系统进网要求	GB7401—87	彩色电视图象质量主观评定方法
GB10753—89	室内电话机插头座	GB7402—87	利用电视信号传送标准时间频率
GB10755—89	投币电话机技术条件	GB6277—86	电视发射机测量方法
GB10756—89	常用邮政设备名词术语	GB6831—88	彩色电视广播接收机基本参数及技术要求
GB10757—89	邮政通信术语		
GB11298.1～4—89	卫星电视地球接收站测量方法	GB8382.1～3—87	调频广播差转机技术参数和测量方法
GB11443.1～4—89	国内卫星通信地球站总技术要求		
GB12563—90	国内卫星通信地球站地面接口要求	GB9372—88	电视广播接收机测量方法
GB11444.1～3—89	国内卫星通信地球站发射、接收和地面通信设备技术要求	GB9374—88	声音广播接收机基本参数
		GB2846—88	调幅广播收音机测量方法
GB/T12640—90	数字微波接力系统通信设备测量方法	GB9379—88	电视接收机主观试验评价方法
		GB9384—88	广播收音机、广播电视接收机、磁带录音机、声频功率放大器（扩音机）的环境试验要求和试验方法
GB12638—90	微波和超短波通信设备辐射安全要求		
GB12192—90	移动通信调频无线电话发射机测量方法	GB12647—90	通用型应用电视制式
		GB12281—90	彩色电视广播接收机与其他设备互连配接要求

第4章 数学公式

1 初等代数

1·1 恒等式

(1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

(2) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

(5) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(6) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

1·2 比例

$a:b=c:d$ 或 $a/b=c/d$ 蕴含:

$$\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}$$

特别,有 $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$　　$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$

1·3 不等式

(1) 若 $a/b<c/d$, b, d 同号,有

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

(2) $a^2+b^2\geqslant 2ab$ (a, b 为实数)

(3) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ ($a>0$, $b>0$, $c>0$)

(4) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

(a_1, a_2, $\cdots$, a_n 均为正数)

(5) $\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^k\leqslant\frac{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k}{n}$

($k>1$)

$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^k\geqslant\frac{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k}{n}$

($0<k<1$)

(6) 若 a_i, b_i ($i=1$, 2, $\cdots$, n) 为任意实数,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

(柯西不等式)

(7) 若 $a>1$, n 为大于1的自然数,则 $a^n>1+n(a-1)$ (贝努里不等式)

(8) $(1+x)^a>1+x^a$ ($x>0$, $a>1$)

(9) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$

(10) $||a_1|-|a_2||\leqslant|a_1\pm a_2|\leqslant|a_1|+|a_2|$

(11) $|\Sigma a_i|\leqslant\Sigma|a_i|$

1·4 复数

1. 定义

$\sqrt{-1}=\mathrm{j}$, 则

$\mathrm{j}^2=-1$　$\mathrm{j}^3=-\mathrm{j}$　$\mathrm{j}^4=1$

$\mathrm{j}^{4n+1}=\mathrm{j}$　$\mathrm{j}^{4n+2}=-1$　$\mathrm{j}^{4n+3}=-\mathrm{j}$　$\mathrm{j}^{4n+4}=1$

($n=0$, 1, 2, $\cdots$)

2. 复数的表示式　当 x、y、r、φ 均为实数时,复数 z 的几种表示式:

代数式 $z=x+\mathrm{j}y$

指数式 $z=re^{j\varphi}$

三角式 $z=r(\cos\varphi+\mathrm{j}\sin\varphi)$

式中,$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, 称为 z 的模;

$\varphi=\arg z=\arctan y/x$, 称为 z 的辐角主值 ($-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$);

$x=\mathrm{Re}z=r\cos\varphi$, 称为 z 的实部;

$y=\mathrm{Im}z=r\sin\varphi$, 称为 z 的虚部。

3. 复数的运算

$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{j}(y_1\pm y_2)$

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{j}(x_2y_1+x_1y_2)\\&=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{j}\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\\&=r_1r_2e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{j}\frac{(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{j}\sin(\varphi_1-\varphi_2)]\\&=\frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}\end{aligned}$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$$
$$= r^n e^{jn\varphi}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$
$$(k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

4. 共轭 复数 $z = x + jy$ 的共轭复数表示为

$$z^* = x - jy$$

共轭运算的性质有：

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$
$$(z^*)^* = z$$
$$zz^* = |z|^2 = x^2 + y^2$$
$$z + z^* = 2\mathrm{Re}z = 2x$$
$$z - z^* = j2\mathrm{Im}z = j2y$$
$$|z_1 z_2^*| = |z_1 z_2|$$
$$z_1 z_2^* + z_2 z_1^* = 2\mathrm{Re}(z_1 z_2^*)$$

5. $$\left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{1} = e^{j\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} \\ \sqrt[n]{-1} = e^{\frac{j(2k+1)\pi}{n}} \end{array}\right\} \begin{array}{l}(n = 1, 2, \cdots; \\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)\end{array}$$

1·5 对数

定义 $a^y = x$ $(a > 0, a \neq 1)$

$$a^{\log_a x} = x$$

(1) $\log_a a = 1$ $\log_a a^y = y$ $\log_a 1 = 0$

(2) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(3) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(4) $\log_a x^n = n\log_a x$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$$

(5) $\log_a x = \log_b x \log_a b = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1 \quad (a \neq 1)$$

1·6 数列

1·6·1 等差数列

$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \cdots$（公差为 d）

(1) 通项（第 n 项）$a_n = a_1 + (n-1)d$

(2) 前 n 项和

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d$$

(3) 等差中项 若 a，b，c 成等差数列，则

$$b = \frac{1}{2}(a + c)$$

1·6·2 等比数列

$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \cdots$（公比为 q）

(1) 通项 $a_n = a_1 q^{n-1}$

(2) 前 n 项和

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

(3) 等比中项 若 a，b，c 成等比数列，则

$$b = \pm\sqrt{ac}$$

(4) 无穷递减等比数列的和

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \quad (|q| < 1)$$

1·6·3 某些有限和

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

(2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$

$$= \frac{1}{3} n(4n^2 - 1)$$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

$$= \left[\frac{1}{2} n(n+1)\right]^2$$

(4) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$

$$= n^2(2n^2 - 1)$$

(5) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$

$$= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

(6) $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \cdots + n(n+1)$

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

(7) $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$

$$= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

(8) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

1·6·4 某些无穷级数

(1) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$

(2) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!} \mp \cdots = \frac{1}{e}$

(3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} \mp \cdots = \log_e 2$

(4) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2$

(5) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\pm\frac{1}{2^n}\mp\cdots=\frac{2}{3}$

(6) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$

$$\pm\frac{1}{2n-1}\mp\cdots=\frac{\pi}{4}$$

(7) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

(8) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$

1·7 阶乘、排列、组合、二项式定理

1·7·1 阶乘

(1) $n!=\prod_{k=1}^{n}k=1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)n$

(2) $(2n)!!=2^n n!=2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)(2n)$

(3) $(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

$=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)$

(4) $0!=1 \quad 0!!=0$

1·7·2 排列

(1) 选排列 从 m 个元素中取 n 个元素的排列

$$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]$$

$$=\frac{m!}{(m-n)!}$$

(2) 全排列

$$P_n=A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$
$$=n!$$

(3) n 个元素中，分别有 r、s、t 个元素相同的排列

$$P=\frac{n!}{r!s!t!}$$

1·7·3 组合 从 m 个元素中取 n 个元素的组合

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$C_m^0=1$$

$$C_m^n=C_m^{m-n}$$

$$C_{m+1}^n=C_m^n+C_m^{n-1}$$

1·7·4 二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{j=0}^{n}C_n^j a^{n-j}b^j$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

展开的系数参见表1·4-24。

1·8 行列式

1·8·1 行列式、子式和代数余子式

1. 行列式 n 阶行列式是由 n^2 个元素排成的方阵，它代表了一个确定的值。

$$D=\det[a_{ik}]=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

2. 子式和代数余子式 n 阶行列式中元素 a_{ik} 的子式 D_{ik} 是将行列式的第 i 行和第 k 列删去，得到的 $n-1$ 阶行列式。

$A_{ik}=(-1)^{i+k}D_{ik}$ 称为 a_{ik} 的代数余子式。

1·8·2 行列式的展开

1. 二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

2. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$
$$-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}$$

3. 高阶行列式 简单拉普拉斯展开式

$$D=\det[a_{ik}]=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}$$

$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

1·8·3　性质

（1）行、列依次序对调，行列式的值不变。

（2）两行（或两列）对调，行列式的值变号。

（3）某行（或列）所有元素乘以数 k 等于原行列式乘以数 k。

（4）某两行（或两列）的元素对应成比例，行列式的值为零。

（5）某行（或列）的元素都是二项式，则该行列式可分解为两个行列式之和，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

（6）某行（或列）的所有元素乘以同一个数，加到另行（或列）的对应元素上，行列式的值不变。

1·8·4　行列式乘法

$$\det[a_{ik}]\det[b_{ik}] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{kj}\right] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{kj}\right] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{jk}\right]$$

1·8·5　三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1·8·6　范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$$

1·9　线性方程和线性方程组

1·9·1　一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

根

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

1·9·2　一元三次方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

令 $x=y-a/3$ 代入，得

$$y^3+py+q=0$$

式中　$p=-a^2/3+b$，$q=2(a/3)^3-ab/3+c$

$$y_1=A+B$$

$$y_{2,3}=-\frac{1}{2}(A+B)\pm \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B)$$

式中　$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$

$$B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

1·9·3　一元四次方程

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

令 $x=y-a/4$ 代入，得

$$y^4+py^2+qy+r=0$$

此方程的根 y_1，y_2，y_3，y_4是

$$\pm\sqrt{z_1}\pm\sqrt{z_2}\pm\sqrt{z_3}$$

此处符号的选择应满足

$$\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}=-\frac{q}{8}$$

其中，z_1，z_2和 z_3是三次方程

$$z^3+\frac{p^2}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0$$

的根。

1·9·4　线性方程组　克莱姆法则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$x_k=\frac{D_k}{D} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

式中　$D=\det[a_{ik}]=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$

D_k 是用常数项 b_1，b_2，…，b_n 来代替 D 中第 k 列元素 a_{1k}，a_{2k}，…，a_{nk} 所得的行列式。

$D\neq 0$ 时，x_k 有唯一确定解；$D=0$，$D_k\neq 0$，无解；$D=0$、$D_k=0$，有无穷解。

2　三角函数与双曲函数

2·1　三角函数

2·1·1　基本关系式

（1）$\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1$

（2）$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$

（3）$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

（4）$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

（5）$\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$

（6）$\operatorname{cosec}^2\alpha-\cot^2\alpha=1$

（7）$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

（8）$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

2·1·2　和（差）角、倍角、半角公式

1．和（差）角公式

（1）$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

（2）$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

（3）$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

（4）$\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

2．倍角公式

（1）$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

（2）$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1$

（3）$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

（4）$\cot 2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$

（5）$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

（6）$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

（7）$\sec 2\alpha=\dfrac{\sec^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$=\dfrac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}$

（8）$\operatorname{cosec} 2\alpha=\dfrac{\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha}{2}$

$=\dfrac{\tan\alpha+\cot\alpha}{2}$

3．半角公式

（1）$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

（2）$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

（3）$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

（4）$\cot\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

2·1·3　和差与积关系公式

（1）$A\sin\alpha+B\cos\alpha$

$=\sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\alpha+\arctan\dfrac{B}{A}\right)$

（2）$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（3）$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（4）$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（5）$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（6）$\tan\alpha\pm\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

（7）$\cot\alpha\pm\cot\beta=\pm\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

（8）$\tan\alpha+\cot\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$

（9）$\cot\alpha-\tan\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

（10）$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

（11）$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

（12）$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

(13) $2\sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

(14) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$$=\frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

(15) $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$$=\frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

(16) $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

$$=\frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

(17) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$$=\frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

2·1·4 反三角函数

(1) $\sin(\arcsin x)=\cos(\arccos x)=\tan(\arctan x)=x$

(2) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

(3) $\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(4) $\cos(\operatorname{arccot} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(5) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

(6) $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$

2·2 双曲函数

2·2·1 双曲函数定义

(1) 双曲正弦 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

(2) 双曲余弦 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

(3) 双曲正切 $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(4) 双曲余切 $\coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(5) 双曲正割 $\operatorname{sech} x=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$

(6) 双曲余割 $\operatorname{cosech} x=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$

2·2·2 相互关系式

(1) $\frac{1}{\cosh x}=\operatorname{sech}x$

(2) $\frac{1}{\sinh x}=\operatorname{cosech}x$

(3) $\frac{1}{\tanh x}=\coth x$

(4) $\frac{\sinh x}{\cosh x}=\tanh x$

(5) $\frac{\cosh x}{\sinh x}=\coth x$

(6) $\cosh^2x-\sinh^2x=1$

(7) $\operatorname{sech}^2x+\tanh^2x=1$

(8) $\coth^2x-\operatorname{cosech}^2x=1$

2·2·3 基本公式

(1) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$

(2) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$

(3) $\tanh(x\pm y)=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}$

(4) $\coth(x\pm y)=\frac{1\pm\coth x\coth y}{\coth x\pm\coth y}$

(5) $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$

(6) $\cosh 2x=\sinh^2x+\cosh^2x$

(7) $\tanh 2x=\frac{2\tanh x}{1+\tanh^2x}$

(8) $\coth 2x=\frac{1+\coth^2x}{2\coth x}$

(9) $\sinh\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\cosh x-1}{2}}$

(10) $\cosh\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\cosh x+1}{2}}$

(11) $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x+1}=\frac{\cosh x-1}{\sinh x}$

(12) $\sinh x\pm\sinh y=2\sinh\frac{x\pm y}{2}\cosh\frac{x\mp y}{2}$

(13) $\cosh x+\cosh y=2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$

(14) $\cosh x-\cosh y$

$$=2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

(15) $\tanh x\pm\tanh y=\frac{\sinh(x\pm y)}{\cosh x\cosh y}$

2·2·4 反双曲函数

(1) $x=\sinh y$,

$$y=\operatorname{arsinh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

(2) $x=\cosh y$,

$$y=\operatorname{arcosh}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\quad(x\geqslant1)$$

(3) $x=\tanh y$,

$$y=\operatorname{artanh}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(|x|<1)$$

(4) $x=\coth y$,

$$y=\operatorname{arcoth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}\quad(|x|>1)$$

2·3 三角函数与双曲函数、指数函数的关系

$\sin jx=j\sinh x$　　$\cos jx=\cosh x$

$\tan jx=j\tanh x$　　$j\cot jx=\coth x$

$\sinh jx=j\sin x$　　$\cosh jx=\cos x$

$\sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$　　$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$

$e^{jx}=\cos x+j\sin x$　　$e^{x}=\cosh x+\sinh x$

3 解析几何

3·1 平面解析几何

3·1·1 坐标变换

1. 平移

$$x=X+a$$
$$y=Y+b$$

2. 旋转

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha$$
$$y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha$$

3. 平移同时旋转

$$x=a+X\cos\alpha-Y\sin\alpha$$
$$y=b+X\sin\alpha+Y\cos\alpha$$

4. 直角坐标与极坐标的关系

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arctan(y/x)\end{cases}$$

3·1·2 点、直线

1. 两点间距离

(1) 直角坐标

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

(2) 极坐标

$$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

2. 三角形及多边形面积

(1) 三角形面积　顶点为 (x_i, y_i)，$i=1, 2, 3$。

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}$$

(2) 多边形面积　顶点为 (x_i, y_i)，$i=1, 2, \cdots, n$。

$$A=\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_3&y_3\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}x_n&y_n\\x_1&y_1\end{vmatrix}\right\}$$

3. 直线方程

(1) 一般式　$Ax+By+C=0$

(2) 斜截式　与正 x 轴的夹角为 φ 且交 y 轴于 b 的直线

$$y=kx+b\qquad k=\tan\varphi$$

(3) 截距式　交 x 轴于 a，交 y 轴于 b 的直线

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\quad(a\neq0,\ b\neq0)$$

(4) 法线式　令 p 是从原点到一直线的有向垂线的长度，α 是正 x 轴与该有向垂线之间的夹角，则此一直线的方程为

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

(5) 点斜式　过点 (x_0, y_0)，且斜率为 k 的直线

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

(6) 两点式　过点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的直线

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

或

$$\begin{vmatrix}x&y&1\\x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\end{vmatrix}=0$$

4. 点线距离

（1）点(x_0, y_0)到直线$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$的距离

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$$

（2）点(x_0, y_0)到直线$Ax+By+C=0$的距离

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

5. 两平行直线间的距离

设L_1：$Ax+By+C_1=0$

L_2：$Ax+By+C_2=0$

$$d = \frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

6. 两直线间的夹角

设L_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，斜率为k_1；

L_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，斜率为k_2。

$$\tan\theta = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \text{ 或 } \tan\theta = \frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

3·1·3 二次曲线

1. 圆 圆心在(x_0, y_0)，半径为R

1）方程

（1）$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

（2）$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$$x_0=-\frac{A}{2},\quad y_0=-\frac{B}{2},$$

$$R^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2-4C)$$

2）圆的切线方程

（1）圆$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$上一点(x_1, y_1)的切线方程

$$(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)=R^2$$

（2）圆$x^2+y^2+Ax+By+C=0$上一点(x_1, y_1)的切线方程

$$x_1x+y_1y+\frac{A}{2}(x+x_1)+\frac{B}{2}(y+y_1)+C=0$$

3）两个圆交角（在交点的两切线的夹角）

圆C_1：$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0$

C_2：$x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2=0$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2-2(C_1+C_2)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2-4C_1}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2-4C_2}}$$

4）过三个非共线点(x_i, y_i)，$i=1, 2, 3$的圆的方程

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. 椭圆 长半轴$=a$，短半轴$=b$，焦距$=2c$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

（1）方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（标准型）

（2）离心率 $e=\frac{c}{a}<1$

（3）焦点 $F(\pm c, 0)$

（4）准线 $x=\pm\frac{a^2}{c}$

（5）切线方程 椭圆于(x_1, y_1)点的切线方程

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

（6）面积 $A=\pi ab$

3. 双曲线 实半轴$=a$，虚半轴$=b$，焦距$=2c$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

（1）方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（标准型）

（2）离心率 $e=\frac{c}{a}>1$

（3）焦点 $F(\pm c, 0)$

（4）准线 $x=\pm\frac{a^2}{c}$

（5）渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$

（6）切线方程 于(x_1, y_1)点的切线方程

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

4. 抛物线（$p>0$）

（1）方程 $y^2=2px$（标准型）

（2）焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

（3）准线 $x=-\frac{p}{2}$

（4）切线方程 于点(x_1, y_1)的切线方程

$$y_1y=p(x+x_1)$$

3·2 立体解析几何

3·2·1 直线

1. 方向余弦和方向数

（1）方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\beta=\frac{y}{r},\ \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

式中 α，β，γ 是有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 分别与 x，y，z 轴的正向夹角。

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

（2）方向数　任何一组与方向余弦成比例的数 m，n，l 称为所论直线的方向数，即

$$\frac{m}{\cos\alpha}=\frac{n}{\cos\beta}=\frac{l}{\cos\gamma}=\sqrt{m^2+n^2+l^2}$$

2. 直线方程

（1）交面式　平面 $A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ 与 $A_2x+B_2y+C_2z=D_2$ 的交线

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$$

式中 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为交线上一点。

（2）两点式　过点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 和 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 的直线

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

（3）对称式　过点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 且有方向数 m，n，l 的直线

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$$

3. 二直线关系

（1）夹角

$$\cos\theta=\frac{m_1m_2+n_1n_2+l_1l_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+l_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+l_2^2}}$$

（2）平行

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{l_1}{l_2}$$

（3）垂直

$$m_1m_2+n_1n_2+l_1l_2=0$$

（4）共面

$$\begin{vmatrix}x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2\\ m_1 & n_1 & l_1\\ m_2 & n_2 & l_2\end{vmatrix}=0$$

3·2·2　平面

1. 平面方程

（1）一般式　$Ax+By+Cz+D=0$

其中 A，B 和 C 不同时为零。

（2）截距式　交 x，y，z 三轴于 a，b，c 处的平面方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

（3）点法式　过点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 且法线的方向数为 A，B，C 的平面方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

（4）三点式　过不在一直线上三点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$(x_2,\ y_2,\ z_2)$，$(x_3,\ y_3,\ z_3)$ 的平面方程

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

2. 两平面的关系

（1）两平面（的法线）之间的夹角

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

（2）两平面平行　$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

（3）两平面垂直　$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

3·2·3　重要的曲面方程

1. 球面方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

球心在 $(a,\ b,\ c)$，半径为 R。

2. 椭球面方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

式中　a，b，c 为椭球面半轴。

3. 单叶双曲面方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

4. 双叶双曲面方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

5. 椭圆抛物面方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

（若 $a=b$，则绕 z 轴旋转）

6. 双曲抛物面方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

4 微分

4·1 导数和微分定义

1. 导数 设 $y=f(x)$ 是实变量 x 的实单值函数，若下列极限存在，则定义为导数

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

2. 微分

$$dy=f'(x)dx$$

4·2 导数运算法则

(1) $(cu)'=cu'$ （c 为常数）

(2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$

(3) $(uv)'=u'v+uv'$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

(5) 若 $y=f(u)$，$u=u(x)$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot u'(x)$$

(6) 反函数导数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

(7) 用参数表示的函数的导数 设

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

(8) 对数微分法 对于幂指函数

$y=a(x)^{b(x)}$ $(a(x)>0)$

$$y'=a(x)^{b(x)}\left[b'(x)\ln a(x)+\frac{b(x)}{a(x)}a'(x)\right]$$

4·3 导数的基本公式

(1) $(c)'=0$ （c 为常数）

(2) $(x^a)'=ax^{a-1}$

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$ $(e^x)'=e^x$

(4) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(5) $(\sin x)'=\cos x$

(6) $(\cos x)'=-\sin x$

(7) $(\tan x)'=\sec^2 x$

(8) $(\cot x)'=-\mathrm{cosec}^2 x$

(9) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(10) $(\mathrm{cosec}\, x)'=-\mathrm{cosec}\, x\cot x$

(11) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

(14) $(\mathrm{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

(15) $(\mathrm{arcsec}\, x)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(16) $(\mathrm{arccosec}\, x)'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(17) $(\sinh x)'=\cosh x$

(18) $(\cosh x)'=\sinh x$

(19) $(\tanh x)'=\mathrm{sech}^2 x$

(20) $(\coth x)'=-\mathrm{cosech}^2 x$

(21) $(\mathrm{sech}\, x)'=-\mathrm{sech}\, x\cdot\tanh x$

(22) $(\mathrm{cosech}\, x)'=-\mathrm{cosech}\, x\cdot\coth x$

(23) $(\mathrm{arsinh}\, x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(24) $(\mathrm{arcosh}\, x)'=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(25) $(\mathrm{artanh}\, x)'=\frac{1}{1-x^2}$

(26) $(\mathrm{arcoth}\, x)'=\frac{1}{1-x^2}$

(27) $(\mathrm{arsech}\, x)'=\pm\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(28) $(\mathrm{arcosech}\, x)'=-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$

(29) $(x^x)'=x^x(1+\ln x)$

4·4 高阶导数与高阶微分法则

4·4·1 定义

$y=f(x)$ 在 x 点的 n 阶导数为

$$\frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$$

n阶微分为 $d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$

4·4·2 法则

若$u=u(x)$，$v=v(x)$在x点处n阶可微，则

（1）$(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$（c为常数）

（2）$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

（3）$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}c_n^ku^{(k)}v^{(n-k)}$

4·4·3 基本公式

（1）$(x^a)^{(n)}=a(a-1)\cdots(a-n+1)\times x^{a-n}$

$(x^n)^{(n)}=n!$

$(x^n)^{(n+1)}=0$

（2）$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

$(e^x)^{(n)}=e^x$

（3）$(\log_ax)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\log_ae}{x^n}$

$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

（4）$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

（5）$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

（6）$(\sin^2x)^{(n)}=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$

（7）$(\sinh x)^{(2n)}=\sinh x$

$(\sinh x)^{(2n-1)}=\cosh x$

（8）$(\cosh x)^{(2n)}=\cosh x$

$(\cosh x)^{(2n-1)}=\sinh x$

（9）$(e^{ax}\sin bx)^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\times\sin\left(bx+n\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

4·5 多元函数微分法

4·5·1 偏导数

（1）多元函数$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，关于x_k的偏导数是极限

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_k+\Delta x_k,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\Delta x_k}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_k}f=\frac{\partial y}{\partial x_k}=f_{x_k}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$(k=1,2,\cdots,n)$

（2）$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的高阶偏导数

$$\frac{\partial^2y}{\partial x_k^2}=f_{x_kx_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)$$

$(k=1,2,\cdots,n)$

$$\frac{\partial^2y}{\partial x_i\partial x_k}=f_{x_ix_k}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)$$

$(i,k=1,2,\cdots,n)$

$i\neq k$时称为混合偏导数，类似，可逐阶定义任意阶偏导数。

4·5·2 全微分

若$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在点x_k（$k=1,2,\cdots,n$）处可微，则全微分

$$dy=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_k}dx_k$$

4·5·3 全导数

若$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x_k=g_k(t)$（$k=1,2,\cdots,n$）

则全导数

$$\frac{dy}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}$$

5 积分

5·1 不定积分的基本性质

（1）$\int[f(x)\pm g(x)]dx$

$$=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

（2）$\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx$

（K为常数）

5·2 不定积分法则

若$\int f(x)dx=F(x)+C$（C为任意常数），则

5·2·1 分部积分法

$$\int uv'dx=\int udv=uv-\int vdu=uv-\int u'vdx$$

或 $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}G(x)$

$(G'(x)=g(x))$

5·2·2 第一换元法

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

$$=F[\varphi(t)]+C$$

常用的换元法有：

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$$

(2) $\int x^{n-1}f(x^n)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}(x^n)$

(3) $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

(4) $\int f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

$$=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$$

(5) $\int f(\ln(x))\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$$

(6) $\int f(e^x)\mathrm{d}x=\int\frac{f(e^x)}{e^x}\mathrm{d}(e^x)$

(7) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$

(8) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x$

$$=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$$

(9) $\int f(\sinh x)\cosh x\mathrm{d}x$

$$=\int f(\sinh x)\mathrm{d}(\sinh x)$$

(10) $\int f(ax^2+bx+c)(2ax+b)\mathrm{d}x$

$$=\int f(ax^2+bx+c)\mathrm{d}(ax^2+bx+c)$$

5·2·3 第二换元法

若 $x=\varphi(t)$ 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，且

$\int f(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(\varphi^{-1}(x))+C$$

常用的变换有

(1) 正弦变换

$x=a\sin t\left(t=\arcsin\frac{x}{a}\right)$,

$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$

$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$

(2) 余弦变换

$x=a\cos t\left(t=\arccos\frac{x}{a}\right)$,

$\sqrt{a^2-x^2}=a\sin t$

$\mathrm{d}x=-a\sin t\mathrm{d}t$

(3) 正切（或双曲正弦）变换

$x=a\tan t\left(t=\arctan\frac{x}{a}\right)$,

$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$

$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$

$x=a\sinh t\left(t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)$,

$\sqrt{a^2+x^2}=a\cosh t$

$\mathrm{d}x=a\cosh t\mathrm{d}t$

(4) 正割（或双曲余弦）变换

$x=a\sec t\left(t=\arccos\frac{a}{x}\right)$,

$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$

$\mathrm{d}x=a\sin t\sec^2 t\mathrm{d}t$

$x=a\cosh t\left(t=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$,

$\sqrt{x^2-a^2}=a\sinh t$

$\mathrm{d}x=a\sinh t\mathrm{d}t$

(5) 万能变换

$x=2\arctan t\left(t=\tan\frac{x}{2}\right)$,

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$\tan x=\frac{2t}{1-t^2} \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

（6）欧拉变换（若 $a>0$，$b^2-4ac<0$）

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x,$$

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}$$

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x,$$

$$dx=2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}dt$$

5·3 基本积分公式

（略去积分常数 C）

（1）$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ （$n\neq-1$）

（2）$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|$

（3）$\int (a+bx)^n dx=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$

（$n\neq-1$）

（4）$\int \frac{1}{a+bx}dx=\frac{1}{b}\ln|a+bx|$

（5）$\int \frac{x}{a+bx}dx$

$$=\frac{bx+a-a\ln|a+bx|}{b^2}$$

（6）$\int e^x dx=e^x$

（7）$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}$

（8）$\int xa^x dx=\frac{a^x\cdot x}{\ln a}-\frac{a^x}{(\ln a)^2}$

（9）$\int xe^{ax}dx=e^{ax}(ax-1)/a^2$

（10）$\int \frac{1}{a+be^{cx}}dx=\frac{x}{a}-\frac{1}{ac}\ln(a+be^{cx})$

（11）$\int \ln x dx=x(\ln x-1)$

（12）$\int (\ln x)^2 dx=x[(\ln x)^2-2\ln x+2]$

（13）$\int x^n\ln ax dx$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln ax-\frac{1}{n+1}\right) \quad (n\neq-1)$$

（14）$\int \frac{(\ln ax)^n}{x}dx=\frac{(\ln ax)^{n+1}}{n+1}$

（$n\neq-1$）

（15）$\int \frac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)$

（16）$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

（17）$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$

（18）$\int \sqrt{x^2+a^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

（19）$\int \sqrt{x^2-a^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

（20）$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

（21）$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)$

（22）$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)$

（23）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

（24）$\int \frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx=\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)$

（25）$\int \sin ax dx=-\frac{1}{a}\cos ax$

（26）$\int \cos ax dx=\frac{1}{a}\sin ax$

（27）$\int \tan ax dx=-\frac{1}{a}\ln|\cos ax|$

(28) $\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|$

(29) $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

(30) $\int \sec x\,dx = \ln(\sec x + \tan x)$

(31) $\int \sin^n ax\,dx = -\frac{1}{na}\left[\sin^{n-1}ax\cos ax - (n-1)a\int \sin^{n-2}ax\,dx\right]$

(32) $\int \cos^n ax\,dx = \frac{1}{na}\left[\cos^{n-1}ax\sin ax + (n-1)a\int \cos^{n-2}ax\,dx\right]$

(33) $\int \tan^n ax\,dx = \frac{1}{(n-1)a}\tan^{n-1}ax - \int \tan^{n-2}ax\,dx \quad (n \neq 1)$

(34) $\int \cot^n ax\,dx = -\frac{1}{(n-1)a}\cot^{n-1}ax - \int \cot^{n-2}ax\,dx \quad (n \neq 1)$

(35) $\int \operatorname{cosec}^n ax\,dx$

$$= -\frac{1}{(n-1)a}\left[\frac{\cos ax}{\sin^{n-1}ax} - (n-2)a\int \frac{dx}{\sin^{n-2}ax}\right]$$

$(n \geqslant 2)$

(36) $\int \sec^n ax\,dx = \frac{1}{(n-1)a}$

$$\times\left[\frac{\sin ax}{\cos^{n-1}ax} + (n-2)a\int \frac{dx}{\cos^{n-2}ax}\right]$$

$(n \geqslant 2)$

(37) $\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}[\sin ax - ax\cos ax]$

(38) $\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}[\cos ax + ax\sin ax]$

(39) $\int x\sin^2 ax\,dx$

$$= \frac{1}{8a^2}[2a^2x^2 - 2ax\sin 2ax - \cos 2ax]$$

(40) $\int x\cos^2 ax\,dx$

$$= \frac{1}{8a^2}[2a^2x^2 + 2ax\sin 2ax + \cos 2ax]$$

(41) $\int x^2\sin ax\,dx$

$$= \frac{1}{a^3}[2ax\sin ax + (2 - a^2x^2)\cos ax]$$

(42) $\int x^2\cos ax\,dx$

$$= \frac{1}{a^3}[2ax\cos ax - (2 - a^2x^2)\sin ax]$$

(43) $\int \arcsin ax\,dx$

$$= x\arcsin ax + \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2}$$

(44) $\int \arccos ax\,dx$

$$= x\arccos ax - \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2}$$

(45) $\int \arctan ax\,dx$

$$= x\arctan ax - \frac{1}{2a}\ln(1 + a^2x^2)$$

(46) $\int \operatorname{arccot} ax\,dx$

$$= x\operatorname{arccot} ax + \frac{1}{2a}\ln(1 + a^2x^2)$$

(47) $\int \sinh x\,dx = \cosh x$

(48) $\int \cosh x\,dx = \sinh x$

(49) $\int \tanh x\,dx = \ln(\cosh x)$

(50) $\int \operatorname{arsinh} x \mathrm{d}x = x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$

(51) $\int \operatorname{arcosh} x \mathrm{d}x = x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$

(52) $\int \operatorname{artanh} x \mathrm{d}x$

$$= x \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

5·4 定积分

5·4·1 定积分及其性质

1. 牛顿-莱布尼兹公式 若$F(x)$是$f(x)$在$[a, b]$上的一个原函数，即$F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

2. 定积分性质

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

(3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

(4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

(5) $\int_a^b Kf(x)\mathrm{d}x = K\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ （K为常数）

(6) 积分第一中值定理

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (\xi \in (a, b))$$

(7) 积分第二中值定理 若在$[a, b]$上$f(x)$单调，$g(x)$可积，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x \quad (\xi \in (a, b))$$

(8) 若在$[a, b]$上$f(x)$单调增加，且$f(a)>0$，$g(x)$可积，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x \quad (\xi \in (a, b))$$

(9) 若在$[a, b]$上$f(x)$单调减少，且$f(b)>0$，$g(x)$可积，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x \quad (\xi \in (a, b))$$

(10) 若$f(x) \in [a, b]$，在$[a, b]$上$g(x)$可积且不变号，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (\xi \in (a, b))$$

3. 积分不等式

(1) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

(2) 若$f(x) \leqslant g(x)$，($x \in [a, b]$)，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(3) 三角不等式

$$\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(4) 许瓦兹不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \times \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

5·4·2 常用定积分公式

(1) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{1}{n-1} \quad (n>1)$

(2) $\int_0^{\infty}\frac{a\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -\frac{\pi}{2} & (a<0)\end{cases}$

(3) 尤拉常数

$$C=-\int_0^{\infty}e^{-x}\ln x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\ln(\ln x)\mathrm{d}x=0.5772157$$

(4) $\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(n\pi)}$

$(0<n<1)$

(5) $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2|a|}$ $(a\neq 0)$

(6) $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}a$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -\frac{\pi}{2} & (a<0)\end{cases}$$

(7) $\int_0^{\infty}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$

(8) $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right| \quad (a\neq b)$$

(9) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 ax}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}|a|$

(10) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$

(11) $\int_0^{\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\cos(x^2)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(12) $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}$

(13) $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}$

$(a>0,\ b>0)$

(14) $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}\mathrm{d}x=0$

$(a>0, b>0)$

(15) $\int_0^{\infty}e^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}$ $(a>0)$

(16) $\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2}$ $(a>0)$

(17) $\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2}$ $(a>0)$

(18) 泊松积分 $\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$

(19) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\cos^n x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2^{n+1}}$

(20) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$(a>b>0)$

(21) $\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2$

(22) $\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$

(23) $\int_0^1\ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

6 常微分方程

6·1 一般概念

(1) 凡联系自变量，未知函数及其某些导数或微分的方程，叫作微分方程。

(2) 未知函数中只含一个自变量的微分方程，称为常微分方程，简称微分方程。

(3) 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫做微分方程的阶。

(4) 在微分方程中，若未知函数及其所有出现的导数都是一次的，则称为线性微分方程，否则

称为非线性微分方程。

（5）如果函数 $y=y(x)$ 满足微分方程

$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$

则称函数 $y=y(x)$ 为该微分方程的解。

（6）如果在微分的解中，含有与方程阶数相同的任意常数的函数族

$$y=y(x; C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

则称为微分方程的通解。

（7）在微分方程的通解中，对任意常数取定特殊值后所得到的解，称为微分方程的特解。

6·2 一阶常微分方程

6·2·1 变量分离型

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(x)$$

（1）若 $g(y)\neq 0$，分离变量，积分得到隐式通解

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$$

（2）若 $g(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 也是微分方程的解，它可能包含在通解中，也可能是微分方程的奇解。

6·2·2 齐次型

1. $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

（1）若 $f(y/x)=y/x$，为变量分离型，其通解为

$$y=Cx$$

（2）若 $f(y/x)\neq y/x$，令 $u=y/x$，方程化为变量分离型，积分得其隐式通解

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln Cx \quad (y=ux)$$

及可能的奇解

$$y=u_0x \qquad (f(u_0)=u_0)$$

2. 准齐次型

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

（1）若行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

即 $a_1/a_2=b_1/b_2=k$，原方程为

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$
$$=g(a_2x+b_2y)$$

令 $z=a_2x+b_2y$，即化为变量分离型

$$\frac{dz}{dx}=a_2+b_2g(z)$$

（2）若 $\Delta\neq 0$，令

$\xi=x-x_0$，$\eta=y-y_0$，其中 x_0，y_0 为方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

的非零解，方程化为齐次方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)=g\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

6·2·3 线性型

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

通解为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

6·2·4 贝努里（Bernoulli）方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n \quad (n\neq 0, 1)$$

可变形为

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$，则化为线性方程，得原方程通解为

$$y^{1-n}e^{(1-n)\int p(x)dx}$$
$$=(1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx+C$$

6·2·5 全微分方程

（1）$p(x, y)dx+q(x, y)dy=0$

而 $\qquad \dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial q}{\partial x}$

可先求得微分表达式 $pdx+qdy$ 的原函数 $U(x, y)$，

$$U(x, y)=\int_{x_0}^{x}p(x, y)dx+\int_{y_0}^{y}q(x_0, y)dy$$

其通解为

$$U(x, y)=C$$

（2）$p(x, y)dx+q(x, y)dy=0$

但 $\qquad \dfrac{\partial p}{\partial y}\neq\dfrac{\partial q}{\partial x}$

方程乘上适当的函数 $u(x, y)$

$$updx+uqdy=0$$

使 $$\frac{\partial}{\partial y}(up)=\frac{\partial}{\partial x}(uq)$$

原方程便化为全微分方程，$u(x, y)$称为原方程的积分因子。

6·2·6 克莱罗（Clairaut）方程

$$y=xp+f(p),\quad p=\frac{dy}{dx}$$

可化为方程

$$[x+f'(p)]\frac{dp}{dx}=0$$

通解为 $$y=Cx+f(C)$$

此外，方程还可能有奇解

$$\begin{cases} y=Cx+f(C) \\ x+f'(C)=0 \end{cases}$$

6·3 高阶常系数线性微分方程

$$y^{(n)}+\sum_{k=1}^{n}a_k y^{(n-k)}=f(x)$$

首先求出相应齐次方程 $f(x)=0$ 的通解 y_C，它包含 n 个任意常数，然后求出非齐次方程的一个特解 y_p，则非齐次方程的通解为 $y=y_C+y_p$。

6·3·1 齐次方程的通解 y_C

特征方程为

$$\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}a_k\lambda^{n-k}=0$$

可解出 λ_k（$k=1, 2, \cdots, n$），称为齐次方程的特征根。

（1）若所有的根（$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$）为实单根，则

$$y_C=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+C_ne^{\lambda_n x}$$

（2）若某个根 λ_r 是 k 重实根，则 y_C 中相应的项为 $(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda_r x}$

（3）若某两个根是一对共轭复根 $\alpha\pm j\beta$，则 y_C 中相应的项为 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

6·3·2 非齐次方程的特解解法

介绍比较系数解法 当方程

$$y^{(n)}+\sum_{k=1}^{n}a_k y^{(n-k)}=f(x)$$

的右端 $f(x)$ 具有特殊形式时，可直接求得一个特解 y_p。

（1）$f(x)=p_m(x)e^{\alpha x}$（$p_m(x)$ 为 m 次多项式）特解为

$$y_p=x^kQ_m(x)e^{\alpha x}$$

式中 k 为实特征根 α 的重数（当 α 不为特征根时，取 $k=0$）；$Q_m(x)$ 为待定的 m 次多项式；将 y_p 代入原方程比较等式两端多项式的系数，可确定 $Q_m(x)$。

（2）$f(x)=e^{\alpha x}[p_l(x)\cos\beta x+p_n(x)\sin\beta x]$

特解为

$$y_p=x^ke^{\alpha x}[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x+R_m^{(2)}\sin\beta x]$$

式中 $R_m^{(1)}$，$R_m^{(2)}$ 为 m 次多项式，m 为 l、n 两数中较大者；k 为复特征根 $\alpha+j\beta$ 的重数（当 $\alpha+j\beta$ 非特征根时，取 $k=0$）。

6·4 常系数非齐次线性微分方程的拉普拉斯变换解法

$$y^{(n)}+\sum_{k=1}^{n}a_k y^{(n-k)}=f(x)$$

为了求解具有初始值 $y(0)$，$y'(0)$，$\cdots$，$y^{(n-1)}(0)$的线性微分方程，把拉普拉斯变换用于两端，从而导出线性代数方程：

$$(s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n)Y(s)=F(s)+G(s)$$

其中

$$Y(s)=\mathscr{L}[y(x)],\quad F(s)=\mathscr{L}[f(x)]$$

$$\begin{aligned}G(s)=\ &y(0)(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-1})\\&+y'(0)(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-2})\\&+\cdots+y^{(n-2)}(0)(s+a_1)\\&+y^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

于是

$$Y(s)=\frac{F(s)}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}+\frac{G(s)}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$$

由于在变换过程中初始条件已被引入，因此所得解是方程的全解。

7 偏微分方程

7·1 一般概念

（1）含有多元未知函数及其偏导数的关系式称为偏微分方程。

一些典型的偏微分方程是从物理问题中归结出来的，反映的是物理规律，因此有应用背景的偏微分方程又常称为数学物理方程。

（2）若方程中未知函数及其所有偏导数都是一次的，则称为线性偏微分方程，否则称为非线性偏微分方程。在非线性偏微分方程中，若对未知函数的最高阶导数来说是线性的，则称为拟线性偏微分方程。

（3）包含有任意函数的解称为偏微分方程的通解；在一些特定条件下求得的解，称为偏微分方程的特解，确定特解的条件称为定解条件。定解条件可以包含：给定解在区域边界上的定解条件称为边界条件；在方程中的某个自变量 t 赋予"时间"意义的情况下，解在 $t=t_0$（t_0为常数）时所满足的定解条件称为初始条件。由方程和定解条件所构成的问题称为定解问题。

7·2　一阶偏微分方程

7·2·1　通解、完全解与奇异解

1. 一阶偏微分方程的一般形式

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_1, p_2, \cdots, p_n)=0$$

式中　$p_k=\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$（$k=1, 2, \cdots, n$）

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)^2 \neq 0$$

2. 通解、完全解与奇异解

（1）若解依赖于一个任意函数，则称为通解。

（2）若解含有 n 个独立常数，则称为完全解或全积分。

（3）设 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, C_1, C_2, \cdots, C_n)=0$ 为一阶偏微分方程的完全解，若从方程组

$$V=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial C_k}=0 \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

消去 C_k 后得到一阶偏微分方程的一个解，则称该解为奇异解或奇积分。

3. 通解与完全解、奇异解的关系

若一阶偏微分方程

$$F(x, y, u, p, q)=0$$

$$\left(p=\frac{\partial u}{\partial x},\ q=\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

有完全解

$$V(x, y, u, a, b)=0$$

式中　a，b 为任意常数，则一阶方程等价于从方程组

$$\begin{cases} V(x, y, u, a, b)=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial u}p=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{\partial V}{\partial u}q=0 \end{cases}$$

中消去 a，b 所得的方程。

用常数变易法，令 $a=a(x, y)$，$b=b(x, y)$，由 $V(x, y, u(x,y), a(x, y), b(x, y))=0$ 求得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial u}p+\dfrac{\partial V}{\partial a}\cdot\dfrac{\partial a}{\partial x} \\ \qquad +\dfrac{\partial V}{\partial b}\cdot\dfrac{\partial b}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{\partial V}{\partial u}q+\dfrac{\partial V}{\partial a}\cdot\dfrac{\partial a}{\partial y} \\ \qquad +\dfrac{\partial V}{\partial b}\cdot\dfrac{\partial b}{\partial y}=0 \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} V(x, y, u, a, b)=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial b}\cdot\dfrac{\partial b}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial y}+\dfrac{\partial V}{\partial b}\cdot\dfrac{\partial b}{\partial y}=0 \end{cases}$$

（1）若 $\partial V/\partial a=\partial V/\partial b=0$，则由

$$\begin{cases} V(x, y, u, a, b)=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial a}=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial b}=0 \end{cases}$$

可确定一阶方程的奇异解。

（2）若 $\partial a/\partial x=\partial a/\partial y=\partial b/\partial x=\partial b/\partial y=0$，即 a，b 为常数，则仍回到一阶方程的完全解。

（3）若 a，b 间存在函数关系，例如 $a=f(b)$，则由下式

$$\begin{cases} V(x, y, u, f(b), b)=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial a}\dfrac{da}{db}+\dfrac{\partial V}{\partial b}=0 \end{cases}$$

消去 b，可确定一阶方程的通解。

7·2·2　某些一阶偏微分方程的解

（1）$F(p, q)=0$

由方程组

$$\begin{cases} F(p, q)=0 \\ p=C_1 \end{cases} \quad (C_1\text{为任意常数})$$

解出 $q=\varphi(C_1)$，得方程完全解

$$u=C_1x+\varphi(C_1)y+C_2 \quad (C_2\text{为任意常数})$$

（2）$F(x,\ p,\ q)=0$

由方程组

$$\begin{cases} F(x,\ p,\ q)=0 \\ q=C_1 \end{cases} \quad (C_1\text{为任意常数})$$

解出 $p=\varphi(x,\ C_1)$，得方程完全解

$$u=\int\varphi(x,\ C_1)\mathrm{d}x+C_1y+C_2$$

（C_2为任意常数）

（3）$F(y,\ p,\ q)=0$

由方程组

$$\begin{cases} F(y,\ p,\ q)=0 \\ p=C_1 \end{cases} \quad (C_1\text{为任意常数})$$

解出

$q=\varphi(y,\ C_1)$，得方程完全解

$$u=C_1x+\int\varphi(y,\ C_1)\mathrm{d}y+C_2$$

（C_2为任意常数）

（4）$F(u,\ p,\ q)=0$

由方程组

$$\begin{cases} F(u,\ p,\ q)=0 \\ \dfrac{p}{q}=C_1 \end{cases} \quad (C_1\text{为任意常数})$$

解出 $q=\varphi(u,\ C_1)$，则由

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u,\ C_1)}=C_1x+y+C_2$$

（C_2 为 任意常数）

可确定原方程的完全解。

（5）$F_1(x,\ p)=F_2(y,\ q)$

由方程组

$$\begin{cases} F_1(x,\ p)=F_2(y,\ q) \\ F_1(x,\ p)=C_1 \end{cases}$$

（C_1为任意常数）

解出 $p=\varphi_1(x,\ C_1)$，$q=\varphi_2(y,\ C_1)$，得原方程的完全解

$$u=\int\varphi_1(x,\ C_1)\mathrm{d}x+\int\varphi_2(y,\ C_1)\mathrm{d}y+C_2$$

（C_2为任意常数）

（6）$u=F_1(x,\ p)+F_2(y,\ q)$

设 $u=\alpha(x)+\beta(y)$，则解常微分方程

$F_1(x,\ \alpha')-\alpha=C$，$\beta-F(y,\beta')=C$

（C为任意常数）

即可得原方程的解。

（7）$F(p_1,\ p_2,\cdots,p_n)=0$ （$p_k=\partial u/\partial x_k$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$；$\sum\limits_{k=1}^{n}(\partial F/\partial p_k)^2\neq0$）

若存在常数 $A_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 使

$F(A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n)=0$

则 $$u=A_0+\sum_{k=1}^{n}A_kx_k \quad (A_0\text{为任意常数})$$

是该方程的一个解。

（8）克莱罗方程

$$u=\sum_{k=1}^{n}p_kx_k+f(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$$

$$(p_k=\partial u/\partial x_k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

完全解为

$$u=\sum_{k=1}^{n}C_kx_k+f(C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n)$$

7·3 二阶线性偏微分方程

7·3·1 二阶线性偏微分方程的化简和分类

两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$a_{11}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f$$

式中 a_{11}，a_{12}，a_{22}，b_1，b_2，c，f 都是自变量 x，y 的实函数，它们在（x，y）平面上的某区域上连续可微。

1．特征方程 常微分方程

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0$$

称为二阶线性偏微分方程的特征方程，其解称为所给方程的特征曲线。

在点 $P(x_0,\ y_0)$ 的邻域 U 内，依 $D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ 的符号，对方程进行分类，作自变量 x，y 的可逆变换，将方程化为所属类型的标准形式。

2．三种类型方程及其标准形式

（1）双曲型方程　$D>0$ 时，方程存在两族实特征曲线

$$\varphi(x,\ y)=C_1,\quad \psi(x,\ y)=C_2$$

作变换 $\xi=\varphi(x,\ y)$，$\eta=\psi(x,\ y)$，方程可化为第一标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=A\frac{\partial u}{\partial\xi}+B\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu+D$$

如再作变换　$\alpha=\xi+\eta$，$\beta=\xi-\eta$，方程可化为第二标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=A_1\frac{\partial u}{\partial\alpha}+B_1\frac{\partial u}{\partial\beta}+C_1u+D_1$$

（2）抛物型方程　$D=0$ 时，方程存在一族实特征曲线

$$\varphi(x,\ y)=C$$

令　$\xi=\varphi(x,y)$，$\eta=\psi(x,y)$，这里 $\psi(x,\ y)$ 是任一适当可微的函数，且

$$\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(x,\ y)}\neq 0$$

这时方程可化为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=A\frac{\partial u}{\partial\xi}+B\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu+D$$

（3）椭圆型方程　$D<0$ 时，方程存在两族共轭复特征曲线

$$\varphi(x,\ y)=\varphi_1(x,\ y)+j\varphi_2(x,\ y)=C$$

$$\varphi^*(x,\ y)=\varphi_1(x,\ y)-j\varphi_2(x,\ y)=C^*$$

且 $\varphi_1^2(x,\ y)+\varphi_2^2(x,\ y)\neq 0$

令　$\xi=\varphi_1(x,\ y)$，　$\eta=\varphi_2(x,\ y)$

于是方程可化为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=A\frac{\partial u}{\partial\xi}+B\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu+D$$

7·3·2　偏微分方程的求解

1．分离变量法　分离变量法是解线性偏微分方程最常用的基本方法。要求解的区域是有界的，且是规则的，例如圆形、圆扇形、矩形、球体、长方体、圆柱体等等。

例　线性齐次方程和齐次边界条件问题的求解。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(0<x<l,\ t>0) & (1\cdot4\text{-}1)\\ u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=0\quad(t\geqslant 0) & (1\cdot4\text{-}2)\\ u(x,\ 0)=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\quad(0\leqslant x\leqslant l) & (1\cdot4\text{-}3)\end{cases}$$

求解步骤如下：

（1）设　$u(x,\ t)=X(x)T(t)$　(1·4-4)

代入方程式(1·4-1)，得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}\overset{令}{=}-\lambda\quad(\lambda 为常数)$$

于是有

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\qquad(1\cdot4\text{-}5)$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0\qquad(1\cdot4\text{-}6)$$

（2）求常微分方程的定解问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0 & (1\cdot4\text{-}5)\\ X(0)=0,\ X(l)=0 & (1\cdot4\text{-}7)\end{cases}$$

的非零解。条件式(1·4-7)是将式(1·4-4)代入边界条件式(1·4-2)而得到的。当

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

时，有非零解

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)。$$

λ_n 称为定解问题式(1·4-5)，式(1·4-7)的特征值(或本征值)，$X_n(x)$ 称为对应于 λ_n 的特征函数(或本征函数)。

（3）将特征值 λ_n 代入式(1·4-6)，解得

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}$$

$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

式中　A_n，B_n 为任意常数。

于是得到满足方程式(1·4-1)和边界条件式(1·4-2)的分离变量形式的一系列特解

$$u_n(x,\ t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

（4）将 $u_n(x,\ t)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 迭加，得

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

使 $u(x,\ t)$ 满足初始条件式(1·4-3)，由此确定出 A_n，B_n。

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} = \psi(x)$$

$$A_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi,$$

$$B_n = \psi_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

式中　A_n, $B_n(n\pi a/l)$分别为函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$在$[0,\ l]$上的傅里叶正弦级数的展开系数。

于是定解问题的解

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{1}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

2．积分变换法　用积分变换来解定解问题的方法称为积分变换法。傅里叶变换可用于解初值问题，而拉普拉斯变换可用于解某些混合问题（既有初始条件又有边界条件的定解问题）。用积分变换解定解问题的步骤为：

（1）根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取适当的积分变换。然后对未知函数中的某个（或多个）自变量进行变换，从而去掉了未知函数对这一（或这些）自变量的偏导数，而得到象函数的含参变量的常微分方程。

（2）对定解条件取相应的积分变换，导出象函数方程的定解条件。

（3）解关于象函数的定解问题，求出象函数。

（4）将象函数取逆变换，即得原定解问题的解。

例1　用傅里叶变换求解初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty,\ t > 0) & (1\cdot4\text{-}8) \\ u(x,\ 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty) & (1\cdot4\text{-}9) \end{cases}$$

把t视作参变量，作$u(x,t)$关于x的傅里叶变换

$$\mathscr{F}[u(x,\ t)] = U(\lambda,\ t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,\ t)e^{-i\lambda x}dx,$$

$$\mathscr{F}[u(x,\ 0)] = \mathscr{F}[\varphi(x)] = \Phi(\lambda)$$

对式（1·4-8），式（1·4-9）分别作傅里叶变换，于是得关于象函数U的常微分方程的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = -a^2\lambda^2 U, \\ U(\lambda,\ 0) = \Phi(\lambda) \end{cases}$$

解之，得

$$U(\lambda,\ t) = \Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

对$U(\lambda,\ t)$进行傅里叶反变换，得

$$\begin{aligned} u(x,\ t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(\lambda,\ t)] \\ &= \mathscr{F}^{-1}[\Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}] \\ &= \mathscr{F}^{-1}[\Phi(\lambda)] * \mathscr{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}] \\ &= \varphi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi \end{aligned}$$

例2　用拉普拉斯变换求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial u}{\partial x^2} \quad (0 < x < \infty,\ t > 0) & (1\cdot4\text{-}10) \\ u(0,\ t) = u_0,\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,\ t) = 0 & (1\cdot4\text{-}11) \\ u(x,\ 0) = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty) \end{cases}$$

式中　u_0为常数。

将x视作参变量，作$u(x,\ t)$对于t的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}[u(x,\ t)] = U(x,\ p) = \int_0^{\infty} u(x,\ t)e^{-pt}dt$$

对方程式（1·4-10）和边界条件式（1·4-11）分别作普拉斯变换，得关于象函数U的常微分方程的定解问题。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{dx^2} - \dfrac{p}{a^2}U = 0 \\ U(0,\ p) = \dfrac{u_0}{p},\ \lim\limits_{x\to\infty} U(x,\ p) = 0 \end{cases}$$

解之，得$U(x,\ p) = \dfrac{u_0}{p}e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}$，取反变换

$$u(x,\ t) = u_0\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\cdot e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}\right] = u_0\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

式中 erfc(y)为余误差函数。

7·4 三类典型的二阶线性偏微分方程

波动方程、热传导方程和泊松方程分别是双曲型、抛物型和椭圆型方程的三种经典方程。

1. 三种经典方程形式 在三维空间 (x, y, z)，它们分别为

(1) 波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f(x, y, z, t)$$

式中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

(2) 热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(x, y, z, t)$$

(3) 泊松方程

$$\Delta u=f(x, y, z)$$

当 $f(x, y, z)=0$ 时，方程

$$\Delta u=0$$

称为拉普拉斯方程。

2. 某些定解问题的解

(1) $$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u & (-\infty<x, y, z<\infty, t>0)\\ u(x, y, z, 0)=\varphi & (x, y, z)\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x, y, z) & (-\infty<x, y, z<\infty)\end{cases}$$

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint_{Aat}\frac{\psi}{t}dA+\frac{\partial}{\partial t}\iint_{Aat}\frac{\varphi}{t}dA\right]$$

式中 Aat为以 (x, y, z) 为球心，以 at 为半径的球面，$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=a^2t^2$，$dA$为球面的面积元素。

(2) $$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) & (-\infty<x, y<\infty, t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x, y), & \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x, y) & (-\infty<x, y<\infty)\end{cases}$$

$$u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi a}\left[\iint_{Kat}\frac{\psi(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+\frac{\partial}{\partial t}\times\iint_{Kat}\frac{\varphi(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right]$$

〔泊松(Poisson)公式〕

式中 Kat为以 (x, y) 为圆心，以 at 为半径的圆，$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=a^2t^2$。

(3) $$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty<x<\infty, t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) & (-\infty<x<\infty)\end{cases}$$

$$u(x, t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

(达朗贝尔(D'Alembert)公式)

(4) $$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ u|_{t=0}=\varphi(x, y)\end{cases}$$

$$u(x, y, t)=\frac{1}{4a^2\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi, \eta)\times\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right]\times d\xi d\eta$$

(5) $$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l, t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x) & (0\leqslant x\leqslant l)\\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0 & (t\geqslant 0)\end{cases}$$

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$$

式中 $C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$

(6) $$\begin{cases}r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 & (r<R)\\ u|_{r=R}=f(\varphi)\end{cases}$$

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\times\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}dt$$

其中 $f(\varphi)\in C$，且

$$f(\varphi+2\pi)=f(\varphi)$$

$$(7)\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\times\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \quad (r<R)\\ u|_{r=R}=f(\theta,\varphi)\end{cases}$$

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\xi,t)\times\frac{R^2-r^2}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{3/2}}\times\sin\xi d\xi dt$$

其中 $f(\theta,\varphi)\in C$

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\xi+\sin\theta\sin\xi\cos(\varphi-t)$$

8 矩阵[8]、[9]

8·1 定义

（1）由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）排成的阵列

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots\quad\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{bmatrix}=[a_{ij}]_{m\times n}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，称 a_{ij} 为矩阵 A 的元(素)。

（2）当 $m=1$ 时，$[a_{ij}]_{1\times n}$ 称为行矩阵。

（3）当 $n=1$ 时，$[a_{ij}]_{m\times 1}$ 称为列矩阵。

（4）当 $m=n$ 时，$[a_{ij}]_{n\times n}$ 称为 n 阶方阵。

8·2 基本运算

对矩阵的运算是通过矩阵元上的运算来定义的。

1. 相等 $[a_{ij}]_{m\times n}=[b_{ij}]_{m\times n}$，当且仅当 $a_{ij}=b_{ij}$ 对一切 i，j 成立。

2. 加减运算 $[a_{ij}]_{m\times n}\pm[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$

3. 数乘运算 $k[a_{ij}]_{m\times n}=[ka_{ij}]_{m\times n}$

4. 乘法运算

$$[a_{ij}]_{l\times m}[b_{ij}]_{m\times n}=\left[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}\right]_{l\times n}$$

5. 微分与积分 若矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的元是参量（数量）t 的函数 $a_{ij}(t)$，则

$$\frac{dA}{dt}=\left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]_{m\times n}$$

$$\int A\cdot dt=\left[\int a_{ij}(t)dt\right]_{m\times n}$$

8·3 运算规则

（1）$A+B=B+A$

（2）$A+(B+C)=(A+B)+C$

（3）$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

（4）$\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$

（5）$A(BC)=(AB)C$

（6）$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

（7）$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

（8）$A(B+C)=AB+AC$

（9）$(B+C)A=BA+CA$

（10）一般说来 $AB\neq BA$

8·4 恒等矩阵和逆矩阵

（1）零矩阵（加法恒等矩阵）

$0=[0]_{m\times n}$ 称 $m\times n$ 零矩阵，其一切元皆等于零。

$$A+[0]=A \qquad 0A=A0=0$$

（2）单位矩阵（乘法恒等矩阵）

$E=[\delta_{ij}]_{n\times n}$ 称为单位矩阵，其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

$$EA=AE=A$$

其中，A 是任意的 $n\times n$ 矩阵。

（3）负矩阵（加法逆矩阵）设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，则 $-A=(-1)A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ 称为 A 的负矩阵。

$$A+(-A)=A-A=0 \qquad -(-A)=A$$

（4）逆矩阵（乘法逆矩阵）若 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，$B=[b_{ij}]_{n\times n}$ 且

$$AB=BA=E$$

则称 A 与 B 互为逆矩阵，记为

$$A=B^{-1}, \quad B=A^{-1}$$

（5）一个方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 是非奇异（正则）矩阵，当且仅当它有（唯一）一个有界的乘法逆矩

阵A^{-1}，满足：

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

若A和B都是非奇异矩阵且$\alpha\neq 0$，则有：
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，$(\alpha A)^{-1}=\alpha^{-1}A^{-1}$，$(A^{-1})^{-1}=A$

8·5 转置矩阵

（1）$A^T=[a_{ij}]^T_{m\times n}=[a_{ji}]_{n\times m}$称为$A$的转置矩阵。

（2）$(A^T)^T=A$

（3）$(A+B)^T=A^T+B^T$

（4）$(\alpha A)^T=\alpha A^T$

（5）$(AB)^T=B^TA^T$

（6）$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

8·6 共轭矩阵

（1）$A^*=[a^*_{ij}]_{m\times n}$称为矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$的共轭矩阵，其中$a^*_{ij}$为$a_{ij}$的共轭复数。

（2）$(A^*)^*=A$

（3）$(A+B)^*=A^*+B^*$

（4）$(\alpha A)^*=\alpha^*A^*$　　（α是复数）

（5）$(AB)^*=A^*B^*$

（6）$(A^T)^*=(A^*)^T$

（7）$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$

8·7 矩阵的秩、迹和行列式

对于一个给定的矩阵，若其不为零的子行列式的最大阶数为r，则称r为该矩阵的秩$r(A)=r$。

一个方阵A是非奇异矩阵，当且仅当其行列式$\det A\neq 0$。

一个$n\times n$阶方阵A的迹是对角线上元素的和

$$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

对有限矩阵A，B，有：

$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$　$\mathrm{tr}(\alpha A)=\alpha\,\mathrm{tr}A$

$\mathrm{tr}(BA)=\mathrm{tr}(AB)$，$\mathrm{tr}(AB-BA)=0$

$\det(AB)=\det(BA)=\det A\det B$

8·8 具有特殊对称性质的矩阵

1. 对称矩阵　若$A=[a_{ij}]_{n\times n}$满足

$A^T=A$，即$a_{ij}=a_{ji}(i,\ j=1,2,\cdots,n)$

则称为对称矩阵。

若A、B均为对称矩阵，则

$A+B$，$A^m(m=0,1,2,\cdots)$，A^{-1}以及αA

仍为对称矩阵。

两个对称矩阵A，B的乘积是对称矩阵，当且仅当$BA=AB$。

2. 反对称矩阵　若$A=[a_{ij}]_{n\times n}$满足

$$a_{ij}=\begin{cases}0, & i=j\\ -a_{ji}, & i\neq j\end{cases}\quad (i,\ j=1,2,\cdots n)$$

即$A^T=-A$

则称为反对称矩阵。

若A、B均为反对称矩阵，则

$A+B$，A^{2m-1}（$m=0,1,2,\cdots$），A^T，αA

仍为反对称矩阵。

3. 埃尔米特矩阵　若$A=[a_{ij}]_{n\times n}$满足

$$A^T=A^*$$

则称为埃尔米特矩阵。

若A、B均为埃尔米特矩阵，则

$A+B$，$A^m(m=0,1,2,\cdots)$，A^{-1}和αA（α为实数）仍为埃尔米特矩阵。

两个埃尔米特矩阵A，B的乘积是埃尔米特矩阵，当且仅当$BA=AB$。

实埃尔米特矩阵是对称矩阵。

4. 反埃尔米特矩阵　若$A=[a_{ij}]_{n\times n}$满足

$$A^T=-A^*$$

则称为反埃尔米特矩阵。

若A、B均为反埃尔米特矩阵，则

$$A+B,\quad A^{-1}$$

仍为反埃尔米特矩阵。

实反埃尔米特矩阵为反对称矩阵。

5. 正交矩阵　若$A=[a_{ij}]_{n\times n}$满足

$A^TA=AA^T=E$，即$A^T=A^{-1}$

则称为正交矩阵。

若A、B均为正交矩阵，则

AB，$A^m(m=0,1,2,\cdots)$，A^{-1}，A^T，$-A$

仍为正交矩阵，且

$$\det A=\pm 1$$

6. 酉矩阵　若$A=[a_{ij}]_{n\times n}$满足

$$(A^T)^*=A^{-1}$$

则称为酉（U）矩阵。

若A、B均为酉矩阵，则

AB，$A^m(m=0,1,2,\cdots)$，A^{-1}

仍为酉矩阵，且

$$\det A\cdot\det A^*=1$$

实酉矩阵为正交矩阵。

8·9 矩阵的变换

8·9·1 初等变换

（1）初等变换包括

1）交换矩阵的两行（列）；

2）用一个不为零的数乘矩阵的某一行（列）；

3）用一个数乘矩阵的某一行（列）加到另一行（列）上。

（2）任何矩阵都可经过有限次初等变换化为对角矩阵。

（3）初等变换不改变矩阵的秩。

8·9·2 相似变换

（1）若存在矩阵 T $\det T\neq 0$，使得矩阵 A 与矩阵 B 满足下述相似变换的关系：

$$B=T^{-1}AT$$

则称 A 和 B 是相似矩阵，记作 $A\sim B$。

（2）$A\sim A$，$A^T\sim A$。

（3）若 $A\sim B$，则 $B\sim A$。

（4）若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$。

（5）$$T^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}A_k\right)T=\sum_{k=1}^{m}T^{-1}A_kT$$

（6）$$T^{-1}\left(\prod_{k=1}^{m}A_k\right)T=\prod_{k=1}^{m}T^{-1}A_kT$$

（7）$T^{-1}A^mT=(T^{-1}AT)^m$

（8）若 $A\sim B$，则 A 与 B 的下述值相同：

秩：$r(A)=r(B)$；

行列式：$\det A=\det B$

迹：$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\mathrm{tr}B$

特征值和特征多项式。

8·9·3 正交变换

（1）相似变换中，若 T 为正交矩阵(即 $T^{-1}=T^T$)，则称

$$B=T^TAT$$

为矩阵 A 的正交变换。

（2）若 A 为对称矩阵，则其正交变换仍为对称矩阵。

8·10 线性方程组的矩阵表示

一个线性方程组：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=b_i\ (i=1,2,\cdots,m)$$

表示为矩阵形式

$$Ax=b$$

式中 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，称为方程组的系数矩阵；

$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$；

$b=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^T$。

矩阵

$$C=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots\ \ \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} & b_m\end{bmatrix}$$

称为方程组的增广矩阵。

（1）若 $r(A)=r(C)=n$（当 $m=n$ 时，$\det A\neq 0$），则方程组有唯一解。

（2）若 $r(A)=r(C)<n$（当 $m=n$ 时，$\det A=0$），则方程组有无穷多组解。

（3）若 $r(A)<r(C)$，则方程组无解。

（4）齐次方程组

$$Ax=0$$

有非零解的充要条件是 $r(A)<n$（当 $m=n$ 时，$\det A=0$）

9 积分变换

9·1 傅里叶级数和傅里叶变换

9·1·1 傅里叶级数

1. 时域连续信号的傅里叶级数 考虑有限展开区间 $-T/2<t<T/2$，对于 $\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|dt$ 存在的函数 $f(t)$，其傅里叶级数展开式为：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0t+b_n\sin n\omega_0t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0t+\varphi_n)$$

$$(-T/2<t<T/2)$$

式中 $\omega_0=2\pi/T$。

若 $f(t)$ 是周期为 T 的周期函数，则上式在整个区间 $(-\infty,\infty)$ 内都成立。

系数

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0t\,dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

$(n=0,\ 1,\ \cdots)$

在每个不连续点上，定义

$$f(t)=\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)]$$

若 $f(t)=f(-t)$，则 $b_n=0$；

若 $f(t)=-f(-t)$，则 $a_n=0$；

若 $f(t)=-f(t+T/2)$，则 $a_n=b_n=0$

$(n=0,\ 2,\ 4,\ \cdots)$

指数傅里叶级数展开式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n=F_{-n}^*=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

2．周期序列的离散傅里叶级数表示式　对于一个周期为 N 的序列 $\tilde{x}(n)$，即

$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+kN)$　　(k 为整数)

其离散傅里叶级数的分析与综合为

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}$$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}$$

式中　$W_N=e^{-j(2\pi/N)}$，$\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 都是周期序列。

9·1·2　傅里叶 (Fourier) 变换

1．时域连续信号的傅里叶变换

(1) 傅里叶变换及其反演公式

$$F(j\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(j\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

若 $f(t)$ 为 t 的实偶函数，则

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$=2\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$$

若 $f(t)$ 为 t 的实奇函数，则

$$F(j\omega)=-j\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$$

$$=-2j\int_{0}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$$

2) 傅里叶变换的性质及主要公式 (参见第 2 篇第 3 章 3 节表2·3-4、表2·3-5和表2·3-6)

2．序列的傅里叶变换

1) 分析与综合

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$X(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续函数，而且是周期为 2π 的周期函数。

(2) 性质　设 $\mathscr{F}[x(n)]=X(e^{j\omega})$

1) $\mathscr{F}[x^*(n)]=X^*(e^{-j\omega})$

2) $\mathscr{F}[x^*(-n)]=X^*(e^{j\omega})$

3) $\mathscr{F}\{\mathrm{Re}[x(n)]\}=X_e(e^{j\omega})$ [$X(e^{j\omega})$ 共轭对称部分]

4) $\mathscr{F}\{j\mathrm{I_m}[x(n)]\}=X_o(e^{j\omega})$ [$X(e^{j\omega})$ 共轭反对称部分]

5) $\mathscr{F}[x_e(n)]=\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$

($x_e(n)$ 为 $x(n)$ 的共轭对称部分)

6) $\mathscr{F}[x_0(n)]=j\mathrm{I_m}[X(e^{j\omega})]$ ($x_o(n)$ 为 $x(n)$ 的共轭反对称部分)

若 $x(n)$ 为实序列，有

(1) $X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$

(2) $\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]=\mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]$

(3) $\mathrm{I_m}[X(e^{j\omega})]=-\mathrm{I_m}[X(e^{-j\omega})]$

(4) $|X(e^{j\omega})|=|X(e^{-j\omega})|$

(5) $\arg[X(e^{j\omega})]=-\arg[X(e^{-j\omega})]$

3．离散傅里叶变换　一个长度为 N 的有限长序列 $x(n)$，其离散傅里叶变换为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\quad(0\leqslant k\leqslant N-1)$$

$X(k)$ 的反变换为

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

$$(0\leqslant n\leqslant N-1)$$

式中 $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$

9·2 拉普拉斯（Laplace）变换

9·2·1 单边拉普拉斯变换

象函数

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$(s=\sigma+j\omega)$$

象原函数

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

式中 $\sigma=\mathrm{Re}s>\sigma_0$

9·2·2 双边拉普拉斯变换

象函数

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

象原函数

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

9·2·3 拉普拉斯变换的性质及主要公式

拉普拉斯变换的性质及主要公式参见第2篇第3章4节表2·3-7、表2·3-8。

9·3 Z变换

9·3·1 定义

单边Z变换

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

双边Z变换

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$X(z)$的反变换

$$x(n)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

式中 C为$X(z)$收敛域内的一条逆时针方向环绕原点的闭合围线。

9·3·2 Z变换的性质及主要公式

Z变换的性质及主要公式参见第2篇第3章5节表2·3-11、表2·3-12。

10 特殊函数

10·1 Γ（Gamma）函数

10·1·1 定义

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \quad (\mathrm{Re}z>0)$$

10·1·2 基本公式

（1）$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ （$\mathrm{Re}z>0$）

（2）$\Gamma(1)=1$

（3）$\Gamma(n+1)=n!$ （$n\in N$）

（4）$\Gamma(nz)=\sqrt{\dfrac{n^{2nz-1}}{(2\pi)^{n-1}}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\dfrac{n-1}{n}\right)$ （$n\in N$）

（5）$\Gamma(2z)=\dfrac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right)$

（6）$\Gamma(z)\Gamma(-z)=\dfrac{\pi}{z\sin\pi z}$

（7）$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

（8）$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$

（9）$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-z\right)=\dfrac{\pi}{\cos\pi z}$

10·1·3 可化为Γ函数的积分

（1）$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}(t-z)t^{z-1}\ln t\,dt=\Gamma(z)$

（2）$\displaystyle\int_0^{\infty} t^{2z-1}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\Gamma(z)$

（3）$\displaystyle\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-\lambda t}dt=\lambda^{-z}\Gamma(z)$ （$\lambda>0$）

（4）$\displaystyle\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)dt=\lambda^{-z}\sin(\alpha z)\Gamma(z)$

（5）$\displaystyle\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)dt=\lambda^{-z}\cos(\alpha z)\Gamma(z)$

（$\mathrm{Re}z>-1$，$\lambda>0$，$|\alpha|<\pi/2$）

（6）$\displaystyle\int_0^{\infty} t^{z-1}\sin t\,dt=\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(z)$ （$z>0$）

(7) $\int_0^\infty t^{z-1}\cos t\,dt = \cos\frac{\pi z}{2}\Gamma(z)$

$(z>0)$

(8) $\int_0^\infty t^{-z}\sin bt\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{b^{z-1}}{\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(z)}$

$(b>0,\ 0<z<2)$

(9) $\int_0^\infty t^{-z}\cos bt\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{b^{z-1}}{\cos\frac{\pi z}{2}\Gamma(z)}$

$(b>0,\ 0<z<1)$

(10) $\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$(n>-1)$

10·2 B (Beta) 函数

10·2·1 定义

$$B(p,\ q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

$(\mathrm{Re}p>0,\ \mathrm{Re}q>0)$

10·2·2 基本公式

(1) $B(p,\ q)=B(q,\ p)$

(2) $B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

(3) $B(p+1,\ q)+B(p,\ q+1)$

$=B(p,\ q)$

(4) $B(p,\ p)=2^{1-2p}B(p,\ 1/2)$

10·2·3 可化为B函数的积分

设$\mathrm{Re}p>0$，$\mathrm{Re}q>0$

(1) $\int_a^b (t-a)^{p-1}(b-t)^{q-1}dt$

$=(b-a)^{p+q-1}B(p,\ q)\quad (b>a)$

(2) $\int_0^1 (1-t^2)^{p-1}dt=2^{2p-2}B(p,p)$

(3) $\int_0^1 t^{p-1}(1-t^\lambda)^{q-1}dt$

$=\frac{1}{\lambda}B\left(\frac{p}{\lambda},\ q\right)\quad (\lambda>0)$

(4) $\int_0^\infty e^{-pt}(1-e^{-zt})^{q-1}dt$

$=\frac{1}{z}B(p/z,\ q)$

$(\mathrm{Re}z>0,\ \mathrm{Re}(p/z)>0)$

(5) $\int_0^{\pi/2}\sin^{p-1}t\cos^{q-1}t\,dt$

$=\frac{1}{2}B(p/2,\ q/2)$

10·3 贝塞尔 (Bessel) 函数

10·3·1 定义

满足贝塞尔微分方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

的函数称为贝塞尔函数，ν称为方程的阶或解的阶。

1. 第一类贝塞尔函数

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)}\times\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}\quad(|\arg z|<\pi)$$

2. 第二类贝塞尔函数（诺伊曼(Neumann)函数）

$$N_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$(|z|<\infty,\ |\arg z|<\pi)$

3. 第三类贝塞尔函数（汉克尔(Hankel)函数）

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+jN_\nu(z)$$
$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-jN_\nu(z)$$

$(|z|<\infty,\ |\arg z|<\pi)$

10·3·2 基本公式

(1) $e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n$

（母函数）

(2) $J_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}J_n(z)-J_{n-1}(z)$

(3) $J_n'(z)=\frac{1}{2}[J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)]$

（4）$zJ_n'(z)=nJ_n(z)-zJ_{n+1}(z)$

$=zJ_{n-1}(z)-nJ_n(z)$

（5）$\frac{d}{dz}[z^nJ_n(z)]=z^nJ_{n-1}(z)$

（6）$\frac{d}{dz}[z^{-n}J_n(z)]=-z^{-n}J_{n+1}(z)$

（7）$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt-z\sin t)dt$

$(n=0,1,2,\cdots)$

（8）$J_{2n}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\sin t)\cos 2nt\,dt$

$(n=0,1,2,\cdots)$

（9）$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{jz\cos t}e^{jn(t-\pi/2)}dt$

$=\frac{(-j)^n}{\pi}\int_0^{\pi}e^{jz\cos t}\cos nt\,dt$

$(n=0,1,2,\cdots)$

10·4 勒让德（Legender）多项式

（1）$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

$(n=0,1,2,\cdots)$

（2）$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)s^n & (|s|<1)\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)s^{-n-1} & (|s|>1)\end{cases}$

（母函数）

（3）$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \frac{2}{2n+1} & (m=n)\end{cases}$

（正交性）

（4）$P_{n+1}(x)$

$=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$

（递推公式）

（5）前五个多项式

$P_0(x)=1$

$P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

11 复变函数[8]、[10]

一个复函数

$w=f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$

$=|w|e^{j\theta}$

$(z=x+jy=|z|e^{j\varphi})$

把给定的定义区域中的每一复的自变量z与一个或多个复的应变量w的值对应起来。

11·1 解析函数

11·1·1 解析（正则，全纯）

1. 复变函数的导数 一个复变函数$w=f(z)$在点$z=z_0$处是可微的，当且仅当极限

$$f'(z_0)=\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在且与z趋于z_0的方式无关。

2. 解析 若单值函数$f(z)$在$z=z_0$的一个邻域内是可微的，则称$f(z)$在z_0点解析。

11·1·2 柯西-黎曼（Cauchy-Riemann）方程

函数$f(z)$在区域D内解析的充分必要条件是：$u(x,y)$和$v(x,y)$在D内任一点$z=x+jy$可微，且满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

在点z处有

$$\begin{aligned}f'(z)&=\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\frac{\partial v}{\partial y}-j\frac{\partial u}{\partial y}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}-j\frac{\partial u}{\partial y}\\&=\frac{\partial v}{\partial y}+j\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

在极坐标(r,θ)下，柯西-黎曼方程为

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

11·1·3 调合函数

（1）若实变函数 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

则称 $u(x,y)$ 为调合函数。

（2）如果 $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ 在区域 D 内解析，则在 D 内，$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 都是调合函数，且构成共轭调合函数。

11·2 积分定理

11·2·1 复变函数的积分

1. 定义 若 $f(z)$ 是定义在曲线 C 上的连续函数，则 $f(z)$ 沿 C 的积分为

$$\int_C f(z)dz$$

$$=\int_C(udx-vdy)+j\int_C(vdx+udy)$$

其中，$f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$，

$z=x+jy$

2. 复变函数积分的性质

（1）$\int_C[\alpha f(z)\pm\beta g(z)]dz$

$$=\alpha\int_C f(z)dz\pm\beta\int_C g(z)dz$$

（α，β 为常数）

（2）$\int_{C_1+C_2} f(z)dz$

$$=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz$$

（3）$\int_{C^-} f(z)dz=-\int_C f(z)dz$

（C^- 表示 C 的反向曲线）

（4）$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqslant\int_C|f(z)||dz|$

$$=\int_C|f(z)|ds$$

（不等式右边表示实函数 $|f(z)|$ 对弧长的曲线积分）

（5）设曲线 C 的长度为 L，$f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)|\leqslant M$，则

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqslant ML$$

11·2·2 柯西-古萨（Cauchy-Goursat）定理

若 $f(z)$ 在单连域 D 内解析，则函数 $f(z)$ 沿 D 中的任何一条闭曲线 C 的积分为零：

$$\oint_C f(z)dz=0$$

11·2·3 柯西（Cauchy）积分公式

设 $f(z)$ 在域 D 及其边界 C 上连续且在 D 上解析，则对于 D 内任一点 z 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi j}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

其中 C 是按逆时针方向循行。

11·2·4 莫累拉（Morera）定理

若 $f(z)$ 在域 D 上连续，并且沿 D 内任意闭曲线 C 的积分

$$\oint_C f(z)dz=0$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析。

11·2·5 刘维尔（Liouville）定理

若函数 $f(z)$ 为全平面的有界解析函数，则其必为常数。

11·3 解析函数的级数展开

11·3·1 泰勒（Taylor）级数

1. 柯西-阿达玛（Cauchy-Hadamard）定理

复变量幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n\quad(C_n\text{为复常数})$$

在圆 $|z-z_0|<R$ 内绝对收敛，在圆外发散，且收敛半径

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}$$

或者

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$$

2. 阿贝尔（Abel）定理 每个复变量幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$

均存在一个收敛半径R（$0\leqslant R\leqslant\infty$）：

（1）幂级数在收敛圆$|z-z_0|<R$内每点绝对收敛，在收敛圆外每点均发散。

（2）幂级数在任一闭圆$|z-z_0|\leqslant r$（$r<R$）上一致收敛。

（3）幂级数在收敛圆$|z-z_0|<R$内的和函数为解析函数。

3. 幂级数的运算 若二复变量幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

有公共的收敛圆$|z-z_0|<R$，则

（1）$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$$

（2）$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_kb_{n-k}(z-z_0)^n$$

（3）$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right\}'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n$$

（4）$$\int\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right\}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}+C$$

4. 泰勒级数展开定理 若函数$f(z)$在圆$|z-z_0|<R$（$R>0$）内解析，则$f(z)$在此圆内唯一地展成泰勒级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$

其中泰勒系数

$$C_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

积分曲线C为圆周$|z-z_0|=r$（$r<R$）

11·3·2 罗朗（Laurent）展开

1. 罗朗级数的展开定理 若$f(z)$在圆环域$R_1<|z-z_0|<R_2$内解析，则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$

其中罗朗系数

$$C_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

（$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$）

积分曲线C为圆周$|z-z_0|=\rho$（$R_1<\rho<R_2$）。

2. 奇点 若在点z_0使$f(z)$不解析，则称z_0为$f(z)$的奇点。若点$z=z_0$是$f(z)$的奇点，但是在z_0的某个邻域$0<|z-z_0|<\delta$上解析，则称z_0为$f(z)$的孤立奇点，有：

（1）可去奇点

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A\quad(A\neq\infty)$$

（2）极点

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

（3）本性奇点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不确定

3. 某些函数的罗朗级数

（1）
$$\frac{1}{z(1-z)}=\begin{cases}\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n & (0<|z|<1)\\ -\dfrac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times(z-1)^n & (0<|z-1|<1)\end{cases}$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}\quad(|z|>1)$$

(2) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{z-2}+j\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \\ \times\dfrac{(2+j)^{n+1}-(2-j)^{n+1}}{5^{n+1}} \\ \times(z-2)^n \\ (0<|z-2|<\sqrt{5}) \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n \\ +2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{z^{2n}} \\ (1<|z|<2)\end{cases}$$

(3) $z^2e^{\frac{1}{z}}=\dfrac{1}{2}+z+z^2$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!z^n}$$

$$(0<|z|<\infty)$$

(4) $e^{z+\frac{1}{z}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}z^{-n}$

$$(0<|z|<\infty)$$

其中　$C_n=C_{-n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\ (n+k)!}$

(5) $\sin z\sin\dfrac{1}{z}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-2n}z^{-2n}$$

$$(0<|z|<\infty)$$

其中　$C_{2n}=C_{-2n}$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2k+1)!\ (2n+2k+1)!}$$

(6) $\sin\dfrac{z}{1-z}$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n}$$

$$(0<|z-1|<\infty)$$

(7) $\arctan z$

$$=\pm\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

$$\times\frac{1}{(2n-1)z^{2n-1}}\qquad(|z|>1)$$

(8) $\ln\dfrac{z-a}{z-b}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{nz^n}$

$$(|z|>\max\{|a|,\ |b|\})$$

11·4　留数和围线积分

11·4·1　留数

若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则 $f(z)$ 在奇点 $z=z_0$ 处的留数为

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)dz$$

式中　C 为圆周 $|z-z_0|=\rho$，ρ 为使函数 $f(z)$ 在 C 所包围的圆内无其他奇点的适当小的正数。显然，$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)$ 为罗朗级数中的系数 C_{-1}。

11·4·2　留数定理

设简单闭曲线 C 内含单值函数 $f(z)$ 至多有限个奇点 z_1，z_2，…，z_n，且 $f(z)$ 连续到 C 上，则有

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)dz$$

11·4·3　孤立奇点的留数

(1) 若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，则

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=0$$

(2) 若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

特别，若 $z=z_0$ 是分式函数 $f(z)=P(z)/Q(z)$ 的一阶极点，则

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

（3）若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\times[(z-z_0)^m f(z)]$$

（4）若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\,\frac{f'(z)}{f(z)}=m$$

（5）若函数 $\varphi(z)$ 在点 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$，$z=z_0$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}[\varphi(z)f(z)]=\varphi(z_0)\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z)$$

11·4·4　对数留数与幅角原理

1．对数留数　积分

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

叫做 $f(z)$ 关于曲线 C 的对数留数。

若 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上解析且不为零，在 C 内部除去有限个极点以外也处处解析，则

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$$

式中　N 和 P 是 $f(z)$ 在 C 内部的零点数和极点数。m 阶的零点或极点算作 m 个零点或极点。

2．幅角原理　如果 $f(z)$ 在 C 上与 C 内解析，且在 C 上不为零，则 $f(z)$ 在 C 内的零点个数为

$$N=\frac{\Delta_C\theta}{2\pi}$$

式中　$\Delta_C\theta$ 是 $f(z)$ 绕围线 C 的幅角的改变量。

12　矢量分析

12·1　矢量代数

若用 a_x、a_y、a_z 分别表示矢量 a 在 x、y、z 轴上的分量，e_x、e_y、e_z 分别表示 x、y、z 轴正向的单位矢量，则

$$a=a_xe_x+a_ye_y+a_ze_z$$

$$|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

12·1·1　矢量的和

1．表示　若 c 为 a 与 b 之和，则可表示为

$$a+b=c$$

$$a_x+b_x=c_x,\quad a_y+b_y=c_y,\quad a_z+b_z=c_z$$

2．性质

（1）交换律　$a+b=b+a$

（2）结合律　$a+(b+c)=(a+b)+c$

12·1·2　数量积

1．定义　矢量 a 与 b 的数量积 $a\cdot b$ 定义为

$a\cdot b=|a||b|\cos\theta$，$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$

式中　θ——a、b 间的角。

$$a\cdot b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

2．性质

（1）交换律　$a\cdot b=b\cdot a$

（2）与数相乘的结合律

$$k(a\cdot b)=ka\cdot b=a\cdot kb$$

（k 是数量）

（3）分配律

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

（4）若 $a\cdot b=0$，则 $|a|=0$ 或 $|b|=0$ 或 a 与 b 垂直。

12·1·3　矢量积

1．定义　矢量 a 与 b 的矢量积 $a\times b$ 定义为

$a\times b=|a||b|\sin\theta\cdot e$，$e$ 为与 a、b 同时垂直的单位矢量，且 a、b、e 按此顺序构成右手系；θ 为 a、b 间的角，$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$。

$$a\times b=\begin{vmatrix}e_x & e_y & e_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$$

2．性质

（1）反交换律　$a\times b=-b\times a$

（2）与数相乘的结合律

$$k(a\times b)=ka\times b=a\times kb$$

（k 是数量）

（3）分配律　$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

（4）若 $a\times b=0$，则 $|a|=0$ 或 $|b|=0$ 或 a 与 b 平行。

12·1·4　混合积

$$[abc]=(a\times b)\cdot c=(b\times c)\cdot a=(c\times a)\cdot b$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面（平行于同一平面）的充要条件是$[\boldsymbol{abc}]=0$。

12·1·5 三重矢积与多重积

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=[\boldsymbol{acd}]\boldsymbol{b}-[\boldsymbol{bcd}]\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{abd}]\boldsymbol{c}-[\boldsymbol{abc}]\boldsymbol{d}$$

$$[\boldsymbol{abc}]\boldsymbol{d}-[\boldsymbol{abd}]\boldsymbol{c}+[\boldsymbol{acd}]\boldsymbol{b}-[\boldsymbol{bcd}]\boldsymbol{a}=0$$

12·2 矢量的微分与积分

12·2·1 矢性函数的导数公式

设矢性函数 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(t)$ 及数性函数 $u=u(t)$ 在 t 的某个范围内可导，则下列公式在该范围内成立。

（1）$\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\boldsymbol{e}_x\dfrac{da_x}{dt}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{da_y}{dt}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{da_z}{dt}$

（2）$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{c}=0$ （$\boldsymbol{c}$为常矢）

（3）$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\pm\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt}$

（4）$\dfrac{d}{dt}(k\boldsymbol{a})=k\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ （k为常数）

（5）$\dfrac{d}{dt}(u\boldsymbol{a})=\dfrac{du}{dt}\boldsymbol{a}+u\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$

（6）$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}$

（7）$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}$

（8）若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$，$u=u(t)$，则

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{a}}{du}\frac{du}{dt}$$

12·2·2 矢性函数的积分

若已知$\boldsymbol{b}(t)$是$\boldsymbol{a}(t)$的一个原函数，则有

$$\int\boldsymbol{a}(t)dt=\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{c} \quad （\boldsymbol{c}为任意常矢）$$

（1）$\displaystyle\int\boldsymbol{a}(t)dt=\boldsymbol{e}_x\int a_x(t)dt+\boldsymbol{e}_y\int a_y(t)dt+\boldsymbol{e}_z\int a_z(t)dt$

（2）$\displaystyle\int k\boldsymbol{a}(t)dt=k\int\boldsymbol{a}(t)dt$ （k为常数）

（3）$\displaystyle\int[\boldsymbol{a}(t)\pm\boldsymbol{b}(t)]dt=\int\boldsymbol{a}(t)dt\pm\int\boldsymbol{b}(t)dt$

（4）$\displaystyle\int\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}(t)dt=\boldsymbol{c}\cdot\int\boldsymbol{a}(t)dt$

（$\boldsymbol{c}$为常矢）

（5）$\displaystyle\int[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}(t)]dt=\boldsymbol{c}\times\int\boldsymbol{a}(t)dt$

（$\boldsymbol{c}$为常矢）

（6）若$\boldsymbol{b}(t)$是连续矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在区间$[t_1,t_2]$上的一个原函数，则

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{a}(t)dt=\boldsymbol{b}(t_2)-\boldsymbol{b}(t_1)$$

12·3 梯度、散度和旋度

（1）哈米尔顿（Hamilton）算子∇

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

∇读作nabla或del，其本身并无意义，仅是一个符号矢量，在运算中具有矢量和微分的双重性质。

（2）梯度 设$\varphi(x,y,z)$为数性函数，则φ的梯度为

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\nabla\varphi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

（3）散度

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

（4）旋度

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

（5）拉普拉斯算子Δ

Δ读作Laplacian。

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

（6）$a\cdot\nabla=(a_x e_x+a_y e_y+a_z e_z)\cdot\left(e_x\frac{\partial}{\partial x}+e_y\frac{\partial}{\partial y}+e_z\frac{\partial}{\partial z}\right)=a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}$

12·4 有关用∇表示的常见公式

假定 a、b、u、v 的偏导数存在，其中 a、b 为矢性函数，u、v 为数性函数。

（1）$\nabla(ku)=k\nabla u$ （k为常数）

（2）$\nabla\cdot(ka)=k\nabla\cdot a$ （k为常数）

（3）$\nabla\times(ka)=k\nabla\times a$ （k为常数）

（4）$\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$

（5）$\nabla\cdot(a\pm b)=\nabla\cdot a\pm\nabla\cdot b$

（6）$\nabla\times(a\pm b)=\nabla\times a\pm\nabla\times b$

（7）$\nabla\cdot(uc)=\nabla u\cdot c$ （c为常矢）

（8）$\nabla\times(uc)=\nabla u\times c$ （c为常矢）

（9）$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$

（10）$\nabla\cdot(ua)=u\nabla\cdot a+\nabla u\cdot a$

（11）$\nabla\times(ua)=u\nabla\times a+\nabla u\times a$

（12）$\nabla\cdot(a\times b)=b\cdot(\nabla\times a)-a\cdot(\nabla\times b)$

（13）$\nabla(a\cdot b)=a\times(\nabla\times b)+(a\cdot\nabla)b+b\times(\nabla\times a)+(b\cdot\nabla)a$

（14）$\nabla\times(a\times b)=(b\cdot\nabla)a-(a\cdot\nabla)b-b(\nabla\cdot a)+a(\nabla\cdot b)$

（15）$\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2 u=\Delta u$ （Δu为调和量）

（16）$\nabla\times(\nabla u)=0$

（17）$\nabla\cdot(\nabla\times a)=0$

（18）$\nabla\times(\nabla\times a)=\nabla(\nabla\cdot a)-\nabla^2 a$

在下面公式中$r=xe_x+ye_y+ze_z$，$r=|r|$

（19）$\nabla r=\frac{r}{r}=r^{\circ}$

（20）$\nabla\cdot r=3$

（21）$\nabla\times r=0$

（22）$\nabla\times[f(r)r]=0$

12·5 正交曲线坐标的梯度、散度和旋度表示式

设正交曲线坐标为(q_1, q_2, q_3)。

$$a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$$

其中e_1，e_2，e_3分别表示坐标曲线q_1，q_2，q_3在某点的切线单位矢量，指向q_1，q_2，q_3增大的一方，除彼此正交外，假定它们构成右手系。a_1，a_2，a_3依次是矢量a在e_1，e_2，e_3方向上的投影。

1. 坐标曲线弧微分

坐标曲线q_i的弧微分ds_i为

$$ds_i=h_i dq_i \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

其中

$$h_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

称为拉梅系数。

2. 一般曲线弧微分

$$ds^2=ds_1^2+ds_2^2+ds_3^2=h_1^2dq_1^2+h_2^2dq_2^2+h_3^2dq_3^2$$

3. 直角坐标（x，y，z）与正交曲线坐标（q_1，q_2，q_3）的关系

$$dx^2+dy^2+dz^2=h_1^2dq_1^2+h_2^2dq_2^2+h_3^2dq_3^2$$

4. 切线单位矢量对曲线坐标的导数公式

（1）$\frac{\partial e_1}{\partial q_1}=-\frac{e_2\partial h_1}{h_2\partial q_2}-\frac{e_3\partial h_1}{h_3\partial q_3}$

（2）$\frac{\partial e_1}{\partial q_2}=\frac{e_2\partial h_2}{h_1\partial q_1}$

（3）$\frac{\partial e_1}{\partial q_3}=\frac{e_3\partial h_3}{h_1\partial q_1}$

（4）$\frac{\partial e_2}{\partial q_1}=\frac{e_1\partial h_1}{h_2\partial q_2}$

（5）$\frac{\partial e_2}{\partial q_2}=-\frac{e_3\partial h_2}{h_3\partial q_3}-\frac{e_1\partial h_2}{h_1\partial q_1}$

（6）$\frac{\partial e_2}{\partial q_3}=\frac{e_3\partial h_3}{h_2\partial q_2}$

（7）$\frac{\partial e_3}{\partial q_1}=\frac{e_1\partial h_1}{h_3\partial q_3}$

（8）$\frac{\partial e_3}{\partial q_2}=\frac{e_2\partial h_2}{h_3\partial q_3}$

（9）$\frac{\partial e_3}{\partial q_3}=-\frac{e_1\partial h_3}{h_1\partial q_1}-\frac{e_2\partial h_3}{h_2\partial q_2}$

5. $\nabla=e_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+e_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+e_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}$

6. 数性函数$\varphi(q_1, q_2, q_3)$的梯度

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}e_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}e_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}e_3$$

7. 散度表示式 设矢量$a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$

$$\mathrm{div}\,a=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3a_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3a_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2a_3)\right]$$

8. 旋度表示式 设矢量 $a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$

$$\mathrm{rot}\,a=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3a_3)-\frac{\partial}{\partial q_3}(h_2a_2)\right]e_1+\frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1a_1)-\frac{\partial}{\partial q_1}(h_3a_3)\right]e_2+\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2a_2)-\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1a_1)\right]e_3$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1e_1 & h_2e_2 & h_3e_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1a_1 & h_2a_2 & h_3a_3 \end{vmatrix}$$

9. 调和量表示式

$$\Delta u=\nabla\cdot\nabla u=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$

12·6 柱面坐标的梯度、散度和旋度表示式

（单位矢量 e_ρ、e_φ、e_z）

柱面坐标系的拉梅系数

$$h_\rho=1,\quad h_\varphi=\rho,\quad h_z=1$$

（1）$$\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial\rho}e_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}e_z$$

（2）$$\mathrm{div}\,a=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\rho a_z)}{\partial z}\right]$$

（3）$$\mathrm{rot}\,a=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right]e_\rho+\left[\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right]e_\varphi+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right]e_z$$

$$=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} e_\rho & \rho e_\varphi & e_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}$$

（4）$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

12·7 球面坐标的梯度、散度和旋度表示式

（单位矢量 e_r，e_θ，e_φ）

球坐标系的拉梅系数为

$$h_r=1,\quad h_\theta=r,\quad h_\varphi=r\sin\theta$$

（1）$$\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi$$

（2）$$\mathrm{div}\,a=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial(r^2a_r)}{\partial r}+r\frac{\partial(\sin\theta a_\theta)}{\partial\theta}+r\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

（3）$$\mathrm{rot}\,a=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right]e_r+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}\right]e_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]e_\varphi$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} e_r & re_\theta & r\sin\theta e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ a_r & ra_\theta & r\sin\theta a_\varphi \end{vmatrix}$$

（4）$$\Delta u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right]$$

12·8 高斯（Gauss）定理

$$\oint_A a\cdot n\,dA=\int_V(\nabla\cdot a)dV$$

其中 n 为闭曲面 A 法线单位矢量，左边是关于 A 的全面积的积分，右边是对围于 A 中的全体积 V 的积分。

12·9 斯托克斯（Stokes）定理

$$\oint_C a\cdot dl=\int_A(\nabla\times a)\cdot n\,dA$$

其中，A 是以闭曲线 C 为边界的面，n 是 A 面的法线单位矢量；dl 是 C 的微小长度矢量，n 和 C 的方向成右手系。

12·10 格林（Green）定理

第一等式

$$\int_V(\nabla\psi\cdot\nabla\phi+\psi\nabla^2\phi)dV$$

$$= \oint_A \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dA$$

第二等式

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV$$

$$= \oint_A \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dA$$

其中，ψ、ϕ 为数性函数；V 是围于闭曲面 A 中的体积；n 是 A 的外法线。

13 数值计算

13·1 误差

13·1·1 误差的来源

（1）模型误差 因数学模型偏离实际所引起的误差。

（2）观测误差 通过观测确定数学模型中包含的某些参量产生的误差。

（3）截断误差 用有限过程代替数学模型无限过程产生的误差。

（4）舍入误差 由于用有限多位小数代替无限多位小数而产生的误差。

13·1·2 绝对误差与相对误差

（1）设 x 是某个数的精确值，x^* 为 x 的近似值，记

$$e^* = |x - x^*|$$

称 e^* 为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差。

（2）绝对误差 e^* 与精确值 x 之比，即

$$e_r^* = \frac{e^*}{|x|} = \left| \frac{x - x^*}{x} \right|$$

称 e_r^* 为近似值 x^* 的相对误差。

（3）绝对误差限 ε^* 是绝对误差 e^* 较好的上界：

$$e^* = |x - x^*| \leqslant \varepsilon^*$$

于是，准确值 $x \in [x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*]$

（4）相对误差限 ε_r^* 是相对误差 e_r^* 的较好上界：

$$e_r^* = \left| \frac{x - x^*}{x} \right| \leqslant \varepsilon_r^*$$

13·2 非线性方程的数值解法

一个超越方程或高于四次的代数方程的解通常不能用公式给出，只好逐步确定解的满足误差要求的近似值。

13·2·1 二分法

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且满足 $f(a)f(b) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内一定有实根。

假定方程 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内只有一个根 x^*，ε 和 δ 分别为根 x^* 和 $|f(x)|$ 的容许误差，则求解步骤如下：

（1）计算 $f(a)$，$f(b)$ 的值；

（2）令 $x = \frac{1}{2}(a + b)$，计算 $f(x)$；

（3）判断：若 $|f(x)| \leqslant \delta$ 或 $b - x \leqslant \varepsilon$，则输出 x，停止计算。

（4）检验：若 $f(x)f(a) < 0$，则令 $b = a$（以 $(a + b)/2$ 代替 b），否则令 $a = x$；

（5）转向（2）。

步骤（3）$b - x \leqslant \varepsilon$ 判别，可用 $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ 或相对误差 $|x_{n+1} - x_n|/|x_{n+1}| < \varepsilon$ 来代替。

误差：

$$|x^* - x_n| \leqslant (b - a)/2^{n+1}, \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

13·2·2 迭代法

将给定的方程 $f(x) = 0$，$x \in [a, b]$，表示成等价形式 $x = \varphi(x)$，给定一个初始值 x_0，按以下公式迭代计算：

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

（1）收敛的充分条件 当

$$|\varphi'(x)| \leqslant L < 1$$

对任意 $x \in (a, b)$ 均成立时，序列 $\{x_n\}$ 收敛于零点 x^*，即 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$。其几何意义是沿着介于直线 $y = x$ 和曲线 $y = \varphi(x)$ 之间的一条阶梯形或螺旋形折线确定出二者的交点，见图1·4-1。

（2）收敛的阶 阶是度量收敛快慢的标志。若存在实数 $p \geqslant 1$ 及非零常数 C，使

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = C$$

则序列 $\{x_n\}$ 是 p 阶收敛的，C 称为渐近误差常数。

当 $p = 1$ 时称作线性收敛，$p > 1$ 时称作超线性收敛，$p = 2$ 时称作平方收敛。

对于一个收敛于 x^* 的单点迭代函数，若 $\varphi(x)$ 是 p 次连续可微的，$x^* = \varphi(x^*)$ 且 $|\varphi'(x^*)| < 1$，则 $p = 1$；若 $\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) =$

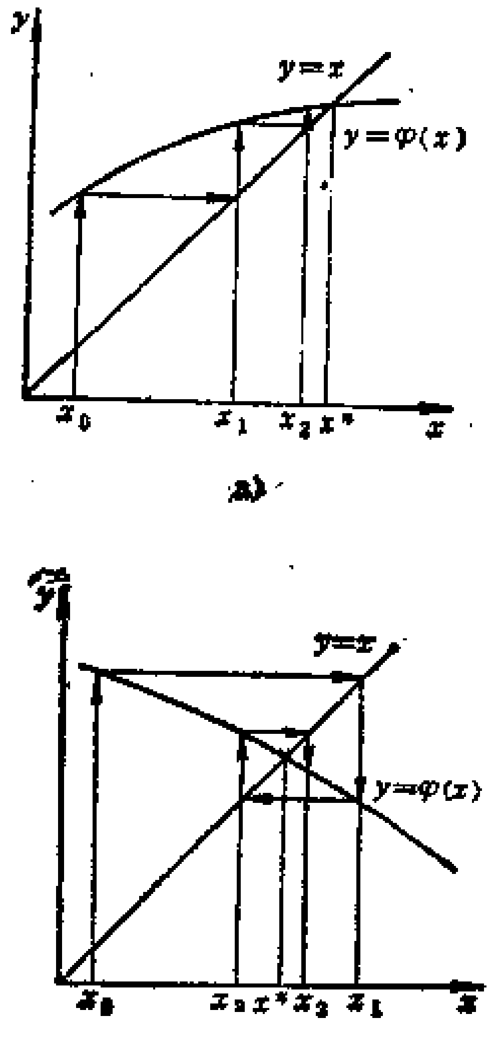


图1·4-1　迭代法

a）$0<\varphi'(x)<1$　b）$-1<\varphi'(x)<0$

0 而 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$，则收敛阶数为 p。

13·2·3　牛顿（Newton）迭代法

牛顿迭代法是在给定函数的零点 x^* 附近以近似值 x_0 处的切线代替曲线，而以切线与 x 轴的交点 x_1 作为更好的近似值，见图1·4-2。

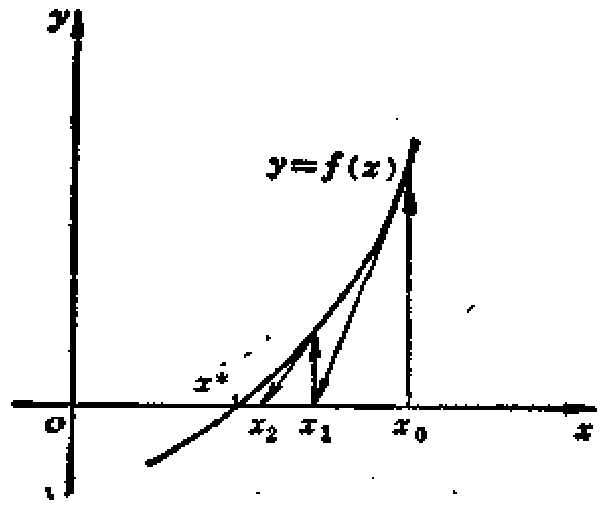


图1·4-2　牛顿法

1. 单根情形　设 $f(x)$ 在零点 x^* 附近具有连续的二阶导数 $f''(x)$，且 $f'(x)\neq 0$，则得牛顿迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

按收敛条件可知，牛顿法的收敛阶数 $p\geqslant 2$。

2. 重根情形　设 x^* 是 $f(x)$ 的 m 重根，牛顿迭代公式为

$$(1)\quad x_{n+1}=x_n-m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

仍具有平方收敛速度，但要预先知道 x^* 的重数 m。

$$(2)\quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2-f(x_n)f''(x_n)}$$

同样具有平方收敛速度。

13·2·4　割线法

过零点附近的两个点 $(x_0,\ f(x_0))$ 与 $(x_1,\ f(x_1))$ 作函数 $f(x)$ 的割线，它与 x 轴的交点给出零点的一个新的近似值 x_2，见图1·4-3。这里要用差商代替牛顿迭代公式中的一阶导数值，从而得迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

割线法的收敛阶数 $p=1.618$，收敛速度不及牛顿法，计算之前要提供两个初值 x_0、x_1，但避免了求解导数值的运算。

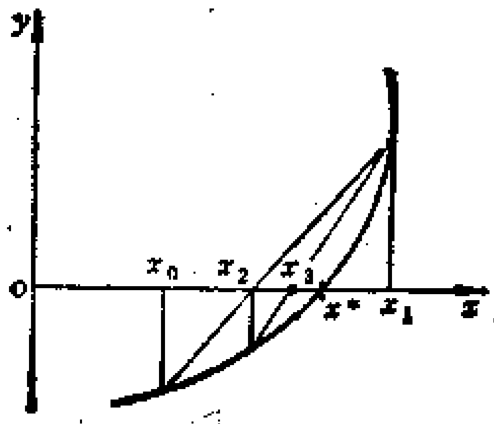


图1·4-3　割线法

13·3　插值计算

对于两两相异的节点 $\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}\subset[a,\ b]\in R$ 上给定一组量测值 $\{y_0,\ y_1,\cdots,\ y_n\}$，插值的目的是寻求一个次数尽可能低的多项式 $F(x)$，使得它在所有 $n+1$ 个离散节点上，满足

$$F(x_k)=y_k,\quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

如图1·4-4。x_k 称为插值节点，$[a,\ b]$ 称为插值区间，$F(x)$ 称为插值多项式。

13·3·1　线性插值

过两个样点 (x_k,y_k)，(x_{k+1},y_{k+1}) 作直线，计算对应于某 x 的 y 值的方法，叫做线性插值法。

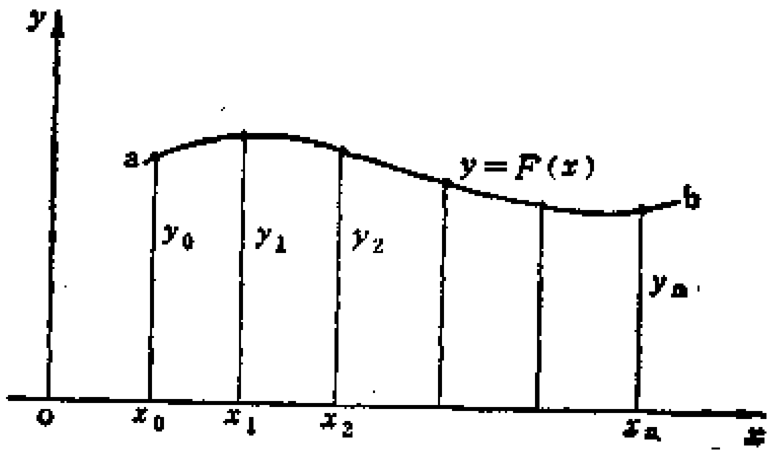


图1·4-4 插值

$$F(x)=y_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}(y_{k+1}-y_k)$$

$$=\frac{1}{x_k-x_{k+1}}\begin{vmatrix} y_k & x-x_k \\ y_{k+1} & x-x_{k+1} \end{vmatrix}$$

13·3·2 拉格朗日（Lagrange）插值

通过 $n+1$ 个互异点 (x_k, y_k) $(k=0, 1\cdots, n)$ 的 n 次多项式（x_k不要求按大小排列和等距）为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

$L_n(x)$称为拉格朗日插值多项式。

其中，$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$，$(k=0,1,\cdots,n)$

显然，$l_k(x)$满足

$$l_k(x_j)=\delta_{jk}=\begin{cases}1, & 当 j=k\\ 0, & 当 j\neq k\end{cases}$$

$l_k(x)$称为以x_0，x_1，…，x_n为节点的 n 次基函数，因此，拉格朗日插值多项式是基函数的线性组合，函数值y_k就是相应的多项式的系数。

当 $n=1$ 时，为线性插值：

$$L_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

当 $n=2$ 时，为抛物插值：

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

插值余项：如果仅给定离散的数据组，利用插值为其提供函数模型，那么对所求得的插值多项式难以从理论上进行误差分析，然而，当用插值多项式逼近已知函数时，误差分析则是必要的。

如果函数 $f(x)$在$[a, b]$上存在 $n+1$ 阶导数，则拉格朗日插值多项式余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k),$$

$$\xi\in(a, b)$$

如果$f^{(n+1)}(x)$在$[a, b]$上有界，即存在常数$M>0$，

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M$$

则有余项估计

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}\left|\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right|$$

13·3·3 牛顿（Newton）插值

1. 差分 设函数 $y=f(x)$在 x 的等距节点

$x_k=x_0+kh$，$(k=0, 1, 2, \cdots, n)$

上，$y_k=f(x_k)$，其中 h 为常数，称为步长。

一阶向前差分 $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$

m 阶向前差分 $\Delta^m y_k=\Delta^{m-1}y_{k+1}-\Delta^{m-1}y_k$

一阶向后差分 $\nabla y_k=y_k-y_{k-1}$

m 阶向后差分 $\nabla^m y_k=\nabla^{m-1}y_k-\nabla^{m-1}y_{k-1}$

零阶差分规定为$\Delta^0 y_k=\nabla^0 y_k=y_k$

$$\nabla^k y_k=\Delta^k y_0$$

2. 差商 函数 $f(x)$关于 $n+1$ 个互异节点 x_0，x_1，…，x_n的差商定义为

零阶差商 $f[x_k]=f(x_k)$，$(k=0, 1, \cdots, n)$

一阶差商 $f[x_0, x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$

二阶差商

$$f[x_0, x_1, x_2]=\frac{f[x_1, x_2]-f[x_0, x_1]}{x_2-x_0}$$

k 阶差商

$$f[x_0, \cdots, x_k]=\frac{f[x_1, \cdots, x_k]-f[x_0, \cdots, x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

3. 牛顿插值公式

1）牛顿差分插值　对于 $n+1$ 个等距节点

$$x_k = x_0 + kh,\quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

牛顿向前差分公式为

$$N_n(x) = N_n(x_0+kh)$$

$$= f(x_0) + \Delta f(x_0)\cdot k + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} \times k(k-1) + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!} k(k-1)\cdots \times (k-n+1)$$

余项：$R_n(x) = R_n(x_0+kh)$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} k(k-1)\cdots \times (k-n)h^{n+1}$$

从函数值 $y_k = f(x_k)(k=0,\ 1\cdots,\ n)$ 出发计算各阶差分特别简单，仅包含减法运算，可按表1·4-1制造差分表，表中每一右列（高一阶的差分）是相邻左一列中相邻元的差。

2）牛顿差商插值

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,\ x_1](x-x_0) + f[x_0,\ x_1,\ x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \prod_{j=0}^{n-1} f[x_0,\ x_1,\cdots,x_n] \times (x-x_j)$$

余项：$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$

$$= f[x,\ x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n] \times \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \times \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

其中，$\min[x, x_0, \cdots, x_n] < \xi < \max[x, x_0, \cdots, x_n]$

表1·4-2给出了计算差商的程式，每列中差商的分子都是前一列中相邻元的差，分母为表的第一列中所属对角线上的元 x_{j+k} 与 x_j 之差。

例　已知 $f(x) = \sinh(x)$ 的离散数据见表1·4-3，求牛顿插值多项式，计算 $f(0.23)$ 的近似值并估计误差。

均差计算的结果见表1·4-4。

$$f[x_0] = f(x_0) = 0$$

$$f[x_0,\ x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{0.20134}{0.2} = 1.0067$$

表1·4-1　差分计算程式

x_k	y_k	Δ　(∇)	Δ^2　(∇^2)	Δ^3　(∇^3)	Δ^4　(∇^4)
x_0	y_0	Δy_0　(∇y_1)	$\Delta^2 y_0$　($\nabla^2 y_2$)	$\Delta^3 y_0$　($\nabla^3 y_3$)	$\Delta^4 y_0$　($\nabla^4 y_4$)
x_1	y_1	Δy_1　(∇y_2)	$\Delta^2 y_1$　($\nabla^2 y_3$)	$\Delta^3 y_1$　($\nabla^3 y_4$)	
x_2	y_2	Δy_2　(∇y_3)	$\Delta^2 y_2$　($\nabla^2 y_4$)		
x_3	y_3	Δy_3　(∇y_4)			
x_4	y_4				

表1·4-2　差商计算程式

x_k	$f[x_k]$	所求差商的阶			
		1	2	3	4
x_0	$\underline{f[x_0]}$	$\underline{f[x_0,\ x_1]}$	$\underline{f[x_0,\ x_1,\ x_2]}$	$\underline{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}$	$\underline{f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,\ x_2]$	$f[x_1,\ x_2,\ x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,\ x_3]$	$f[x_2,\ x_3,\ x_4]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3,\ x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

注：加横线的差商是 $N_n(x)$ 的相应系数。

表1·4-3 $f(x)$的离散数据

x_k	0.00	0.20	0.30	0.50
$f(x_k)$	0.00000	0.20134	0.30452	0.52110

表1·4-4 差商计算结果

x_k	$f[x_k]$	1	2	3
0.00	0.00000	1.0067	0.08367	0.17332
0.20	0.20134	1.0318	0.17033	
0.30	0.30452	1.0829		
0.50	0.52110			

$$f[x_1, x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}=\frac{0.30452-0.20134}{0.30-0.20}=1.0318$$

$$f[x_0, x_1, x_2]=\frac{f[x_1, x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{1.0318-1.0067}{0.30}=0.08367$$

仿此，可求出$f[x_0, x_1, x_2, x_3]=0.17332$。牛顿差商插值多项式为

$$N_3(x)=1.0067x+0.08367x(x-0.20)+0.17332x(x-0.20)(x-0.30)$$

由此可算出$f(0.23)\approx N_3(0.23)\approx 0.23203$

因$f^{(4)}(x)=\sinh(x)$，余项为

$$R_3(x)=\frac{1}{4!}x(x-0.20)\times(x-0.30)(x-0.50)\sinh(\xi)\quad(0<\xi<0.5)$$

误差估计

$$|R_3(0.23)|\leqslant\frac{1}{24}\times0.23\times0.03\times0.07\times0.27\times0.53\approx3\times10^{-6}$$

13·3·4 埃尔米特（Hermite）插值

埃尔米特插值是拉格朗日插值的推广，这种插值除考虑函数值之外，还要考虑到导数值。作为一种具体情形，下面给出带一阶导数插值的多项式。

设函数$f(x)$在$n+1$个互异节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$的函数值与导数值为

$$f(x_k)=f_k,\ f'(x_k)=f'_k\ (k=0,1,\cdots,n)$$

要求构造一个次数不超过$2n+1$的多项式，这就是埃尔米特多项式，记作H_{2n+1}，满足条件

$$H_{2n+1}(x_k)=f_k,\ H'_{2n+1}(x_k)=f'_k,\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}f_k\left[1-2(x-x_k)\times\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{x_k-x_j}\right]l_k^2(x)+\sum_{k=0}^{n}f'_k(x-x_k)l_k^2(x)$$

式中 $l_k(x)$是拉格朗日基本插值函数，

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

余项：$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)$

$$=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2$$

式中 节点$x_0, x_1, \cdots, x_n\in[a, b]$，$\xi\in(a, b)$且依赖于$x$。

特例：当$n=1$时，满足插值条件

$$H_3(x_0)=f_0,\ H_3(x_1)=f_1,$$
$$H'_3(x_0)=f'_0,\ H'_3(x_1)=f'_1$$

的两点三次多项式

$$H_3(x)=\left[f_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)+f_0'(x-x_0)\right]\times\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+\left[f_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)+f_1'(x-x_1)\right]\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

余项：$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$，

ξ 在 x_0 与 x_1 之间。

13·3·5 分段线性插值

这是一种用折线逼近曲线的插值方法。

设 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，相应函数值为 $y_0, y_1, \cdots, y_n$。求作一函数 $p(x)$，满足：

（1）在区间 $[a, b]$ 上连续；

（2）在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是线性函数；

（3）$p(x_k)=y_k$ （$k=0, 1, \cdots, n$）。

这样的 $p(x)$ 称为分段线性插值函数。

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

式中 $l_k(x)$ 为基函数。

$$l_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}, & x\in[x_0, x_1]\\ 0, & x\in(x_1, x_n]\end{cases}$$

$$l_k(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}, & x\in[x_{k-1}, x_k]\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}, & x\in(x_k, x_{k+1}]\\ 0, & x\notin[x_{k-1}, x_{k+1}]\end{cases}$$

$(k=0, 1, \cdots, n-1)$

$$l_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & x\in[x_{n-1}, x_n]\\ 0, & x\in[x_0, x_{n-1})\end{cases}$$

13·4 线性代数方程组的数值解法

求解线性代数方程组可分为直接法和迭代法两大类。

13·4·1 直接法

设所要求解的线性代数方程组为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

可采用下述几种方法求解。

1. 高斯（Gauss）消去法 将要求解的方程组写成

$$\begin{aligned}
&a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)}\\
&a_{21}^{(1)}x_1+a_{22}^{(1)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}^{(1)}x_1+a_{n2}^{(1)}x_2+\cdots+a_{nn}^{(1)}x_n=b_n^{(1)}
\end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$A^{(1)}x=b^{(1)}$$

其中

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)}\cdots\cdots a_{1n}^{(1)}\\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)}\cdots\cdots a_{2n}^{(1)}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)}\cdots\cdots a_{nn}^{(1)}\end{bmatrix}$$

为 n 阶方阵，简记作

$$A^{(1)}=[a_{ij}^{(1)}]_{n\times n}$$
$$x=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$$
$$b^{(1)}=[b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \cdots, b_n^{(1)}]^T$$

（1）消元 对于 $k=1, 2, \cdots, n-1$，作下列消元运算

$$l_{ik}=\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad (a_{kk}^{(k)}\neq 0)$$

$$a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-l_{ik}a_{kj}^{(k)}$$
$$b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-l_{ik}b_k^{(k)}$$
$$(i, j=k+1, \cdots, n)$$

以上计算结果为如下等价的三角形方程组：

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n&=b_1^{(1)}\\
a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n&=b_2^{(2)}\\
\cdots\quad\cdots\quad&\cdots\\
a_{nn}^{(n)}x_n&=b_n^{(n)}
\end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$A^{(n)}x=b^{(n)}$$

$A^{(n)}$ 为上三角形矩阵

$$A^{(n)}=\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)}\cdots a_{1n}^{(1)}\\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)}\cdots a_{2n}^{(2)}\\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)}\cdots a_{3n}^{(3)}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots a_{nn}^{(n)}\end{bmatrix}$$

$$b^{(n)}=[b_1^{(1)}, b_2^{(2)}, \cdots, b_n^{(n)}]^T$$

（2）回代 由等价三角形方程组自下而上求

出 x_n, x_{n-1}, …, x_1

$$x_n=\frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

$$x_k=\frac{b_k^{(k)}-\sum\limits_{j=k+1}^{n}a_{kj}^{(k)}x_j}{a_{kk}^{(k)}}$$

$$(k=n-1,\ \cdots,\ 2,\ 1)$$

2. 杜利特尔（Doolittle）分解法 如果方程组的系数矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的顺序主子式全不为零，即行列式

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdots\cdots a_{ii} \end{vmatrix}\neq 0$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

则 A 可分解为下三角形矩阵 L 与上三角形矩阵 U 的乘积

$$A=LU$$

通常称这种分解为矩阵 A 的 LU 分解。

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ l_{21} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2}\cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12}\cdots u_{1n} \\ & u_{22}\cdots u_{2n} \\ 0 & \ddots\ \vdots \\ & u_{nn} \end{bmatrix}$$

这里，l_{ij}，u_{ij} 均为待定元素，利用矩阵乘法可推出

$$u_{kj}=a_{kj}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj}$$

$$(j=k,\ k+1,\ \cdots,\ n)$$

和

$$l_{ik}=\frac{a_{ik}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk}}{u_{kk}}$$

$$(i=k+1,\ \cdots,\ n)$$

对于 $k=1$，2，…，n 交替进行上述运算，即从 U 的第1行与 L 的第1列开始，计算共分 n 步，每步先计算 U 的一行，再计算 L 相应的一列，最后可得 L 和 U 的全部元素，于是，便完成了 A 的 LU 分解，计算过程如下：

$$\begin{array}{llll|l} u_{11} & u_{12} & u_{13}\cdots\cdots u_{1n} & & \text{第1步} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23}\cdots\cdots u_{2n} & & \text{第2步} \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & & u_{nn} & \text{第}n\text{步} \end{array}$$

求得 L 和 U 后，由

$$Ly=b$$

得递推公式

$$y_i=b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

由

$$Ux=y$$

得递推公式

$$x_i=\frac{y_i-\sum\limits_{k=i+1}^{n}u_{ik}x_k}{u_{ii}}$$

$$(i=n,\ n-1,\ \cdots,\ 1)$$

这种方法解 n 阶方程组大约需作 $n^3/3$ 次乘除法，与高斯消去法计算量大体相同。

3. 乔莱斯基（Cholesky）分解法（平方根法） 这是解正定方程组的一种有效的方法。

设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 是一个 n 阶对称矩阵，即 $A^T=A$，而且对于任意的 n 维非零向量 $x=[x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n]^T$，$x\in R^n$，满足

$$x^TAx=\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0$$

则称 A 为正定矩阵。正定矩阵的顺序主子式

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdots\cdots a_{ii} \end{vmatrix}>0$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

对正定方程组的求解，首先通过乔莱斯基分解 $A=LL^T$，算出 L 后，通过求解两个三角形方程组

$$Ly=b,\ L^Tx=y$$

得到 $Ax=b$ 的解。

1）计算步骤

（1）分解 $A=LL^T$，L 为对角元素均为正数的下三角矩阵

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 $l_{ii}>0$（$i=1, 2, \cdots, n$）

$$l_{jj}=\sqrt{a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

（$j=1, 2, \cdots, n$）

$$l_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}$$

（$i=j+1, \cdots, n$）

（2）解 $Ly=b$ 与 $L^Tx=y$

$$y_i=\frac{b_i-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k}{l_{ii}}$$

（$i=1, 2, \cdots, n$）

$$x_i=\frac{y_i-\sum_{k=i+1}^{n} l_{ki}x_k}{l_{ii}}$$

（$i=n, n-1, \cdots, 1$）

2）运算量 乔莱斯基分解法求解 n 阶正定方程组共需

n 次开平方

$\dfrac{n^3+9n^2+2n}{6}$ 次乘除运算

$\dfrac{n^3+6n^2-7n}{6}$ 次加减运算

所需的计算量大约为高斯消去法（或 LU 分解法）的一半。

13·4·2 迭代法

迭代法是逐步求解方程组的一类方法，设方程组为

$$Ax=b$$

其中，$A\in R^{n\times n}$，$b\in R^n$。若将 A 分裂为

$$A=M-N$$

且 M 非奇异，则可写成等价形式

$$Mx=Nx+b$$

或

$$x=Bx+f$$

其中，$B=M^{-1}N$，$f=M^{-1}b$。选定初始向量 $\in R^n$ 可以构造出迭代方法：

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f\ (k=0, 1, \cdots)$$

如果

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=x^*$$

则 x^* 是方程 $Ax=b$ 的解。对于充分大的 k，向量 $x^{(k)}$ 可以作为方程的近似解。

1．雅可比（Jacobi）迭代 当矩阵 A 的对角线元素 $a_{ii}\neq 0$ 时，可建立迭代公式

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

（$i=1, 2, \cdots, n$）

计算一般按 $x_1^{(k+1)}$，$x_2^{(k+1)}$，$\cdots$，$x_n^{(k+1)}$ 的次序进行。

2．高斯-塞德尔（Gauss-Seidel）迭代 雅可比迭代法在计算 $x_i^{(k+1)}$ 时，$x_1^{(k+1)}$，$\cdots$，$x_{i-1}^{(k+1)}$ 已经计算好，但未加利用，仍用 $x_1^{(k)}$，$\cdots$，$x_{i-1}^{(k)}$，高斯-塞德尔在每个分量的计算中利用了最新的迭代值，迭代公式为

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

（$i=1, 2, \cdots, n$）

3．松弛法（SOR） 由塞德尔迭代公式和加速收敛公式两部分组成，是对高斯-塞德尔迭代公式的一种修改，可加速收敛的速度。

迭代 $$\tilde{x}_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

加速 $x_i^{(k+1)}=\omega\bar{x}_i^{(k+1)}+(1-\omega)x_i^{(k)}$

或写成

$$x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

式中 ω——松弛因子，

当 $0<\omega<1$ 时，称为亚松弛；

当 $\omega=1$ 时，称完全松弛，为高斯-塞德尔迭代；

当 $1<\omega<2$ 时，称超松弛。

13·5 数值积分

数值积分和微分是从近似计算的角度，采用某种数值过程来求解定积分和微分的近似值。

13·5·1 牛顿-柯特斯（Newton-Cotes）求积公式

1. 牛顿-柯特斯公式及牛顿-柯特斯系数 牛顿-柯特斯公式是等距节点的插值型求积公式。将区间 $[a,\ b]$ 分成 n 等分，步长 $h=(b-a)/n$，设节点 x_k 处的函数值为 f_k。通过 $n+1$ 个互异节点 $(x_k,\ f_k)(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 的拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_k l_k(x)$$

为了计算积分的近似值，用 $L_n(x)$ 代替 $f(x)$ 进行积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx I_n(f)$$

$$=\int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{n}f_k\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$$

$$=(b-a)\sum_{k=0}^{n}f_k C_k^{(n)}$$

这个式子称为牛顿-柯特斯公式，$C_k^{(n)}$ 称为牛顿-柯特斯系数。

$$C_k^{(n)}=\frac{1}{n}\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{t-j}{k-j}\mathrm{d}t$$

$C_k^{(n)}$ 只与节点个数 n 有关，而与区间端点 a、b 无关，并且 $\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=1$。

部分柯特斯系数见表1·4-5。

表1·4-5 部分柯特斯系数

n	$C_k^{(n)}$ $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

当 $n=1$ 时，$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)\times[f(a)+f(b)]=T$ 为梯形公式；

当 $n=2$ 时，$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\times\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=S$ 为辛普森（Simpson）公式。

2. 误差项 设 $I_n(f)=\int_a^b L_n(x)dx$ 为牛顿-柯特斯公式，$h=(b-a)/n$，$E_n(f)=\int_a^b f(x)dx-I_n(f)$

（1）当 n 为偶数时，误差

$$E_n(f)=\frac{h^{n+3}f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)dt$$

（2）当 n 为奇数时，误差

$$E_n(f)=\frac{h^{n+2}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)dt$$

式中 $\xi\in[a,\ b]$

3. 稳定性 如果系数 $C_k^{(n)}$ 为同号时，数值计算是稳定的；如果系数 $C^{(n)}$ 出现异号时，不能保证数值的稳定性，因此，一般 n 不宜取得过大，一般常用 $n=1$，2，4 几种。

13·5·2 龙贝格（Romberg）法

这是在计算梯形和序列的基础上，应用线性外插的加速方法。

将积分区间 $[a,\ b]$ 分成 2^k 等分，求得梯形和式

$$k=0,\quad h_0=b-a,$$

$$T_0^0=h_0\left[\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}\right]$$

$$k=1,\quad h_1=\frac{b-a}{2},$$

$$T_0^1=h_1\left[\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}+f(a+h_1)\right]$$

……………………………………

$$h_k=\frac{b-a}{2^k},$$

$$T_0^k=h_k\left[\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}+\sum_{j=1}^{2^k-1}{}' f(a+jh_k)\right]$$

T_0^k 可视为子区间长度 h_k 的函数。

T_1^k 是等价于以 h_{k+1} 为步长的辛普森求积公式

$$T_1^k=\frac{4T_0^{k+1}-T_0^k}{4-1}$$

T_2^k 是等价于以 h_{k+2} 为步长的柯特斯公式

$$T_2^k=\frac{4^2T_1^{k+1}-T_1^k}{4^2-1}$$

一般地，有龙贝格公式

$$T_m^k=\frac{4^mT_{m-1}^{k+1}-T_{m-1}^k}{4^m-1}$$

计算顺序见表1·4-6。

表1·4-6 龙贝格算法计算过程

k	T_0^k	T_1^k	T_2^k	T_3^k	…
0	①T_0^0				
1	②T_0^1	③T_1^0			
2	④T_0^2	⑤T_1^1	⑥T_2^0		
3	⑦T_0^3	⑧T_1^2	⑨T_2^1	⑩T_3^0	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

注：①～⑩表示计算顺序，k 表示二分次数。

13·5·3 高斯型求积公式

1. 高斯-勒让德（Gauss-Legendre）公式 将积分区间变换成 $[-1,\ 1]$，取在 $[-1,\ 1]$ 上正交的 n 次勒让德多项式的 n 个零点 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 作为求积节点，得高斯-勒让德求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

表1·4-7给出了 $n=1$ 到 7 的求积节点和系数。

对于积分区间为 $[a,\ b]$ 的情形，可作变换

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$$

将变量化为 $t\in[-1,\ 1]$，再用高斯-勒让德公式计算。

例：用高斯-勒让德公式计算

$$I=\int_1^{1.5} e^{-x^2}dx$$

本题 $[a,\ b]=[1,\ 1.5]$，经过变换后，为

表1·4-7 高斯-勒让德公式的节点和系数

n	x_k	A_k
1	0	2
2	±0.577 350 269 189 626	1
3	0 ±0.774 596 669 241 483	8/9 5/9
4	±0.339 981 043 584 856 ±0.861 136 311 594 053	0.652 145 154 862 546 0.347 854 845 137 454
5	0 ±0.538 469 310 105 683 ±0.906 179 845 938 664	0.568 888 888 888 889 0.478 628 670 499 366 0.236 926 885 056 189
6	±0.238 619 186 083 197 ±0.661 209 386 466 265 ±0.932 469 514 203 152	0.467 913 934 572 691 0.360 761 573 048 139 0.171 324 492 379 170
7	0 ±0.405 845 151 377 397 ±0.741 531 185 599 394 ±0.949 107 912 342 759	0.417 959 183 673 469 0.381 830 050 505 119 0.279 705 391 489 277 0.129 484 966 168 870

$$I=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}e^{-(t+5)^2/16}dt$$

用 $n=2$ 的两点公式

$$I\approx\frac{1}{4}\left\{\exp\left[-\frac{(5+0.5773502692)^2}{16}\right]+\exp\left[-\frac{(5-0.5773502692)^2}{16}\right]\right\}$$

$$=0.1094003$$

用 $n=3$ 的三点公式，计算得

$$I\approx0.1093642$$

2. 高斯-切比雪夫（Gauss-Чебышев）公式 这是含有权函数为 $(1-x^2)^{-1/2}$时的高斯型积分公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f(x_k)$$

该求积公式的节点x_k是 $n+1$ 次切比雪夫多项式的 $n+1$ 个零点

$$x_k=\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$(k=0,\ 1,\cdots,\ n)$$

13.6 常微分方程初值问题的数值解法

许多问题可以用微分方程或微分方程组描写，但大部分不能用解析方法求解，由于高阶微分方程可以化为一阶微分方程组，而后者又可以借助于向量写法表示为单个的方程，所以这里仅给出一阶方程初值问题的简单解法。

一阶常微分方程的初值问题是

$$y'=f(x,\ y)$$

$$y(x_0)=y_0$$

其中 $f(x,\ y)$是在某个区域 $D=\{(x,\ y)|a\leqslant x\leqslant b,\ y\in R\}$连续且满足李普希兹（Lipschitz）条件，即对一切$x\in[a,\ b]$及y_1，$y_2\in R$存在常数$L>0$，使

$$|f(x,\ y_1)-f(x,\ y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$$

成立。这样，将保证$y(x)$在区间$[a,\ b]$上满足初值条件的必存在且唯一的解。

13·6·1 尤拉（Euler）方法

1. 尤拉方法计算公式 将区间$[a,\ b]$ n等分，设 $h=(b-a)/n$，$x_k=a+kh$($k=0$，1，…，n)，有

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,\ y_k)$$

例1 用尤拉方法解初值问题

$$y'=-y+x+1,\ y(0)=1$$

取 $h=0.1$，计算至 $x=0.5$。

本题 $f(x,\ y)=-y+x+1$，$y_0=1$

$$y_{k+1}=y_k+h(-y_k+x_k+1)$$

$$=(1-h)y_k+hx_k+h$$

$=0.9y_k+0.1x_k+0.1$

计算结果与精确解 $y(x)=x+e^{-x}$ 如表1.4-8所示。

表1·4-8　尤拉方法求解结果

x_k	y_k	$y(x_k)$	$\|y(x_k)-y_k\|$
0	1.000000	1.000000	0
0.1	1.000000	1.004837	4.837×10^{-3}
0.2	1.010000	1.018731	8.731×10^{-3}
0.3	1.029000	1.040818	1.182×10^{-2}
0.4	1.056100	1.070320	1.422×10^{-2}
0.5	1.090490	1.106531	1.604×10^{-2}

2. 梯形公式　为一种的单步方法，公式为

$$y_{k+1}=y_k+h/2[f(x_k,\ y_k)+f(x_{k+1},\ y_{k+1})]$$

一般需用迭代法或其他的解非线性方法求解。迭代公式是

$$y_{k+1}^{(m+1)}=y_k+h/2[f(x_k,\ y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1}^{(m)})]\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

其中迭代初值 $y_{k+1}^{(0)}$ 可用欧拉公式提供

$$y_{k+1}^{(0)}=y_k+hf(x_k,\ y_k)$$

13·6·2　龙格-库塔（Runge-Kutta）方法

龙格-库塔公式的一般形式是

$$y_{k+1}=y_k+\sum_{j=1}^{N}c_jK_j$$

$$K_1=hf(x_k,\ y_k)$$

$$K_j=hf\left(x_k+a_jh,\ y_k+\sum_{i=1}^{j-1}b_{ji}K_i\right)$$

$$(j=2,\ 3,\ \cdots,\ N)$$

式中　c_j，a_j，b_{ji} 均为常数。

1. 二阶龙格-库塔公式

（1）中点公式

$$y_{k+1}=y_k+hf\left(x_k+\frac{1}{2}h,\ y_k+\frac{1}{2}hf(x_k,y_k)\right)$$

（2）霍恩（Heun）公式

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{4}\left[f(x_k,\ y_k)+3f\left(x_k+\frac{2h}{3},\ y_k+\frac{2h}{3}f(x_k,\ y_k)\right)\right]$$

（3）改进的尤拉方法

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,\ y_k)+f(x_{k+1},\ y_k+hf(x_k,\ y_k))]$$

2. 四阶方法　四阶方法有几种形式，下面给出著名的经典龙格-库塔方法：

$$y_{k+1}=y_k+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$$

$$K_1=hf(x_k,\ y_k)$$

$$K_2=hf\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{1}{2}K_1\right)$$

$$K_3=hf\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{1}{2}K_2\right)$$

$$K_4=hf(x_k+h,\ y_k+K_3)$$

例2　用经典 $R-K$ 方法求解初值问题

$$y'=-y+x+1,\ y(0)=1$$

取 $h=0.1$，计算至 $x=0.5$。

本题 $f(x,\ y)=-y+x+1$，$y_0=1$

$x\in[0,\ 0.5]$

$$K_1=hf(x_0,\ y_0)=0.1(-1+0+1)=0$$

$$K_2=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{K_1}{2}\right)=0.1\left(-1+\frac{0.1}{2}+1\right)=0.005$$

$$K_3=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{K_2}{2}\right)=0.1\left[-\left(1+\frac{0.005}{2}\right)+\frac{0.1}{2}+1\right]=0.00475$$

$$K_4=hf(x_0+h,\ y_0+K_3)=0.1[-(1+0.00475)+0.1+1]=0.009525$$

$$y_1=y_0+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)=1.00483750$$

仿此，可求出其余 y 值，计算结果见表1·4-9。其中 $y(x_k)$ 是精确值，其数值见表1·4-8。在计算量大致相同的情况下，经典 $R-K$ 法比尤拉法及改进尤拉法要好。

13.6.3　阿达姆斯（Adams）方法

这是一种线性多步法，具有运算量少的特点。

1. 公式

（1）阿达姆斯外推公式　这里给出常用的四步四阶公式

表1·4-9　经典R-K法求解结果

x_k	y_k	$\lvert y(x_k)-y_k\rvert$
0	1.00000000	0
0.1	1.00483750	8.2×10^{-8}
0.2	1.01873090	1.5×10^{-7}
0.3	1.04081842	2.0×10^{-7}
0.4	1.07032029	2.4×10^{-7}
0.5	1.10653093	2.7×10^{-7}

$$y_{k+4}=y_{k+3}+\frac{h}{24}(55f_{k+3}-59f_{k+2}+37f_{k+1}-9f_k)$$

四步外推公式需要四个初值，由于初值问题仅给出$y(x_0)=y_0$，其余的三个初值要用单步方法提供。

（2）阿达姆斯内插公式　三步四阶的内插公式是

$$y_{k+3}=y_{k+2}+\frac{h}{24}(9f_{k+3}+19f_{k+2}-5f_{k+1}+f_k)$$

这是一种隐式方法，比外推的显示方法误差要小。

2. 计算　下面举例说明阿达姆斯方法的计算

例3　分别用四阶阿达姆斯外推和内插公式解初值问题

$$y'=-y+x+1,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$y(0)=1。$$

本题$f_k=-y_k+x_k+1$，取$h=0.1$，有

$$x_k=kh=0.1k$$

（1）外推公式计算

$$y_{k+4}=y_{k+3}+\frac{h}{24}(55f_{k+3}-59f_{k+2}+37f_{k+1}-9f_k)$$

$$=\frac{1}{24}[18.5y_{k+3}+5.9y_{k+2}-3.7y_{k+1}+0.9y_k+0.24k+3.24]$$

（2）内插公式计算

$$y_{k+3}=\frac{1}{24}[-0.9y_{k+3}+22.1y_{k+2}+0.5y_{k+1}-0.1y_k+0.24k+3]$$

解出：

$$y_{k+3}=\frac{1}{24.9}[22.1y_{k+2}+0.5y_{k+1}-0.1y_k+0.24k+3]$$

初值：显示方法的y_0，y_1，y_2，y_3及隐式方法的y_0，y_1，y_2均用本例准确解$y(x)=x+e^{-x}$的值，对一般的方程，可用$R-K$方法计算初值。计算结果见表1·4-10。

表1·4-10　阿达姆斯方法计算结果

x_k	准确值	显示法	误差	隐式法	误差
0	1.00000000				
0.1	1.00483718				
0.2	1.01873075				
0.3	1.04081822			1.04081801	2.1×10^{-7}
0.4	1.07032005	1.07032292	2.9×10^{-6}	1.07031966	3.8×10^{-7}
0.5	1.10653066	1.10653548	4.8×10^{-6}	1.10653014	5.2×10^{-7}
0.6	1.14881164	1.14881841	6.8×10^{-6}	1.14881101	6.3×10^{-7}
0.7	1.19658530	1.19659339	8.1×10^{-6}	1.19658459	7.1×10^{-7}
0.8	1.24932896	1.24933816	9.2×10^{-6}	1.24932819	7.7×10^{-7}
0.9	1.30656966	1.30657961	1.0×10^{-5}	1.30656884	8.1×10^{-7}
1.0	1.36787944	1.36788996	1.1×10^{-5}	1.36787860	8.4×10^{-7}

14　概率与统计

14·1　事件及其运算

14·1·1　事件

（1）试验或观测的一种可能结果称为一个事件。

（2）在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件称为随机事件。

（3）在一定条件下，必然发生的事件称为必然事件，记作Ω。

（4）在一定条件下，必然不发生的事件称为不可能事件，记作ϕ。

14·1·2　事件的运算

1. 子事件　若A出现必导致B出现，则称A是B的子事件，或者说B包含A，记作$A\subset B$（或$B\supset A$）。

2. 相等　若$A\subset B$，且$B\subset A$，则说A与B相等，记作$A=B$。

3. 和 事件$A_1,\cdots,A_n$中至少有一个发生，称为$A_1,\cdots,A_n$的和，记作$A_1\cup\cdots\cup A_n$或$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$。

4. 积 n个事件$A_1,\cdots,A_n$同时发生，称为$A_1,\cdots,A_n$的交，记作$A_1\cap\cdots\cap A_n$或$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$或简记为$A_1A_2\cdots A_n$。

5. 差 事件A发生而B不发生，称为A与B的差，记作$A-B$。

6. 互斥 若事件A、B不可能同时发生，则称A、B是互不相容事件或互斥事件，互斥事件满足$AB=\phi$。

7. 互逆 若A、B中必发生其一，但不可能同时发生，则称A、B为互逆事件或对立事件，记作$A=\bar{B}$，对立事件满足$A\cup B=\Omega$且$AB=\phi$。

14·2 概率的定义与性质

14·2·1 定义

当试验条件可以重复，试验次数无限增加时，如果事件E发生的频率趋于一个稳定的数值，这个值称为事件E的概率，以$P(E)$表示。

14·2·2 概率的性质

（1）对不可能事件ϕ，$P(\phi)=0$；对必然事件Ω，$P(\Omega)=1$；对任意事件E，$0\leqslant P(E)\leqslant 1$。

（2）可加性，对互不相容事件E_1，E_2，$\cdots$，E_n，$E_iE_j=\phi(i\neq j)$，则

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{n}E_m\right)=\sum_{m=1}^{n}P(E_m)$$

（3）对任一事件E，有

$$P(\bar{E})=1-P(E)$$

（4）若$A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

$$P(B)\geqslant P(A)$$

（5）连续性，若随机事件序列E_1，$E_2\cdots$是单调的，则

$$P(\lim_{n\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}P(E_n)$$

14·3 概率的基本运算

1. 加法定理

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

若A、B互斥：$AB=\phi$，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

若$\bigcup_{m=1}^{n}E_m=\Omega$，$E_iE_j=\phi(i\neq j)$，则

$$\sum_{m=1}^{n}P(E_m)=1$$

2. 条件概率 在事件B已经出现的条件下，事件A出现的概率，称为条件概率，其计算式为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

3. 概率的乘法定理 设E_1，E_2，$\cdots$，E_n为n个事件（$n\geqslant 2$），满足$P(E_1E_2\cdots E_{n-1})>0$，则

$$P(E_1E_2\cdots E_n)=P(E_1)P(E_2|E_1)\times P(E_3|E_1E_2)\cdots\times P(E_n|E_1E_2\cdots E_{n-1})$$

若E_1，E_2，$\cdots$，E_n是n个相互独立的事件，则

$$P(E_1E_2\cdots E_n)=P(E_1)P(E_2)\cdots P(E_n)$$

4. 全概率公式 设A_1，A_2，$\cdots A_n$满足$\bigcup_{m=1}^{n}A_m=\Omega$，$A_iA_j=\phi(i\neq j)$，则对任一事件$E$，有

$$P(E)=\sum_{m=1}^{n}P(A_m)P(E|A_m)$$

5. 贝叶斯公式 若$\bigcup_{m=1}^{n}A_m=\Omega$，$A_iA_j=\phi(i\neq j)$，则对任一事件$E$，$P(E)>0$，有

$$P(A_k|E)=\frac{P(A_k)P(E|A_k)}{\sum_{m=1}^{n}P(A_m)P(E|A_m)}$$

14·4 随机变量及其分布函数

14·4·1 随机试验与随机变量

随机试验是一种在相同条件下重复多次的试验，但是，每次的试验结果是不可预计的。与随机试验结果相关的实数，称为随机变量，它是按一定概率可以在一个特定数集中取值的变量。一个随机变量可以是离散的或连续的。

离散随机变量由其概率p_i来达。设x_i是随机变量X的一个可能取的值，则概率p_i为

$$p_i = P(X = x_i)$$

$$\sum_i p_i = 1$$

14·4·2　分布函数

1. 分布函数概念及性质

1）分布函数　对任意x，给出随机变量X小于x的概率的函数：

$$F(x) = P(X < x)$$

此时，分布函数$F(x)$是左连续的。

2）性质

（1）$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，

$(-\infty < x < +\infty)$。

（2）单调不减，若$x_1 > x_2$，则

$F(x_1) \geqslant F(x_2)$

（3）$F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

2. 离散随机变量的分布函数

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

$$= \sum_{x_i < x} p_i$$

多于一维的离散随机变量的分布函数，例如，对于二维情况，令(x_i, y_j)是(x, y)平面中一个点的坐标。

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

$$= \sum_{\substack{x_i < x \\ y_j < y}} P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{\substack{x_i \leqslant x \\ y_j < y}} p_{ij}$$

边缘概率分布

$$p_1(x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_j p_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

和
$$p_2(y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_i p_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

分别是与Y无关的$X = x_i$的概率和与X无关的$Y = y_j$的概率。

条件概率分布

$$p(x_i | y_j) = p_{ij}/p_2(y_j), \quad p_2(y_j) > 0$$

和
$$p(y_j | x_i) = p_{ij}/p_1(x_i), \quad p_1(x_i) > 0$$

分别是$Y = y_j$已经出现时$X = x_i$的概率和$X = x_i$已经出现时$Y = y_j$的概率。

独立性　如果对于所有的x_i和y_j，有

$$p_{ij} = p_1(x_i) \cdot p_2(y_j)$$

则随机变量X、Y相互独立。

3. 连续随机变量的分布函数　分布函数$F(x)$的微商$f(x) = \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$称为概率密度函数。其中$f(x)\mathrm{d}x$是概率元：

$$f(x)\mathrm{d}x = P(x < X < x + \mathrm{d}x)$$

分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

表示随机变量小于x的概率。

对于二维情况

边缘概率密度函数

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$$

例如，$f_1(x)\mathrm{d}x$是变量X存在于x和$x + \mathrm{d}x$之间，与Y无关的概率。

条件概率密度函数

$$f(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, \quad f_2(y) > 0$$

$$f(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}, \quad f_1(x) > 0$$

例如，$f(x | y_0)\mathrm{d}x$是$Y = y_0$时的变量X在x和$x + \mathrm{d}x$之间的概率。

独立性　对于所有的x和y，如果有

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

则两个随机变量X和Y是相互独立的。

分布函数

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

它表示变量X和Y分别小于x和y的概率。

14·5　随机变量的数字特征

随机变量的数字特征，是对分布函数进行某种运算的结果，它部分地描述了分布的性态。均值和中位数确定中心位置。在几何学上，均值是概率密度函数重心的横坐标，而中位数把概率函数分为两等分。均方根、方差、标准差是围绕均值的分散度的度量。三阶和四阶的中心矩分别描述概率密度函数的非对称性和峰。

1. 期望或均值

$$\mu = E(X) = \sum_i p_i x_i \quad \text{（离散型）}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x \quad \text{（连续型）}$$

对于随机变量 X 的函数 $\varphi(X)$，期望值为

$$E[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i) p_i \quad \text{（离散型）}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x \quad \text{（连续型）}$$

期望的性质：

（1）如 c 是常数，则 $E(c) = c$。

（2）线性：对任意常数 k_i（$i = 1, \cdots, n$），有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} k_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i E(X_i)$$

（3）如 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

2. 矩和方差

（1）q 阶原点矩　对一维分布，随机变量 X 的 q 次幂的期望

$$E(X^q) = \sum_i p_i x_i^q \quad \text{（离散型）}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^q f(x) \mathrm{d}x \quad \text{（连续型）}$$

（2）均方根

$$[E(X^2)]^{1/2} = \left[\sum_i p_i x_i^2\right]^{1/2} \quad \text{（离散型）}$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x\right]^{1/2} \quad \text{（连续型）}$$

（3）q 阶中心矩

$$E[(X-\mu)^q] = \sum_i p_i (x_i - \mu)^q \quad \text{（离散型）}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^q f(x) \mathrm{d}x \quad \text{（连续型）}$$

（4）方差

$$\sigma^2 = D(X) = E[(X-\mu)^2]$$

$$= \sum_i p_i (x_i - \mu)^2 \quad \text{（离散型）}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) \mathrm{d}x \quad \text{（连续型）}$$

（5）标准差　方差的正平方根

$$\sigma = \left[\sum_i p_i (x_i - \mu)^2\right]^{1/2} \quad \text{（离散型）}$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) \mathrm{d}x\right]^{1/2} \quad \text{（连续型）}$$

（6）中位数　是这样的一个值 m，对于无论是大于或小于 m 的情况，随机变量 X 都有相等的概率。

$$P(X > m) = P(X < m) = 1/2$$

对于连续型分布，有

$$\int_{m}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{m} f(x) \mathrm{d}x = 1/2$$

它是反映分布集中位置的一个数字特征。中位数总存在，但可以不唯一。

14·6 特征函数

1. 特征函数的定义

特征函数 $C(u)$ 由分布函数 $F(x)$ 或概率密度函数 $f(x)$ 定义

$$C(u) = E(e^{iux})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \mathrm{d}F(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) \mathrm{d}x \quad \text{（连续型）}$$

$$= \sum_i p_i e^{iux_i} \quad \text{（离散型）}$$

式中　u 为实数。

2. 特征函数的性质

（1）$|C(u)| \leqslant |C(0)| = 1$

（2）$C(-u) = C^*(u)$

此处星号表示复共轭。

（3）如果随机变量X的特征函数为$C_X(u)$，那么，随机变量$Y = aX + b$（a、b为二常数）的特征函数为

$$C_Y(u) = e^{jub}C_X(au)$$

（4）设两随机变量X、Y相互独立，则$X + Y$的特征函数为

$$C_{X+Y}(u) = C_X(u)C_Y(u)$$

（5）函数$C(u)$是连续状况下的概率密度函数$f(x)$的傅里叶变换式，因此

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(u)e^{-jux}du$$

14·7 统计学上独立变量的加法

若两个连续的相互独立的随机变量X_1、X_2，概率密度分别为$f_1(x)$和$f_2(x)$，则它们的和$X = X_1 + X_2$的概率密度为卷积积分

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt$$

简写为 $f(x) = f_1(x) * f_2(x)$

同样，和的分布函数为

$$P(x) = F_1(x) * P_2(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t)F_2(x-t)dt$$

计算卷积积分比较复杂，可借助于特征函数的性质

$$C(u) = C_1(u)C_2(u)$$

先求出$C(u)$，并导出作为$C(u)$的傅里叶变换$f(x)$使计算简化，上述性质可延伸到多个随机变量和的情况。

14·8 分布

14·8·1 几种重要的分布

1. 二项分布 产生二项分布的重要现实源泉是所谓的贝努里（Bernoulli）试验。这是一系列的重复独立试验，每次试验结果只有两个，其中一个概率总是p，另一个的概率总是$1-p$。

设在一个随机试验中，每次试验结果出现某事件E的概率为p，则重复n次事件E出现的次数$X = k$的概率为

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

这个离散型分布称为二项分布，记作$B(n,\ p)$，它依赖于自然数n和实数p。

在n次试验中，某事件E至少出现一次的概率是

$$1 - (1-p)^n$$

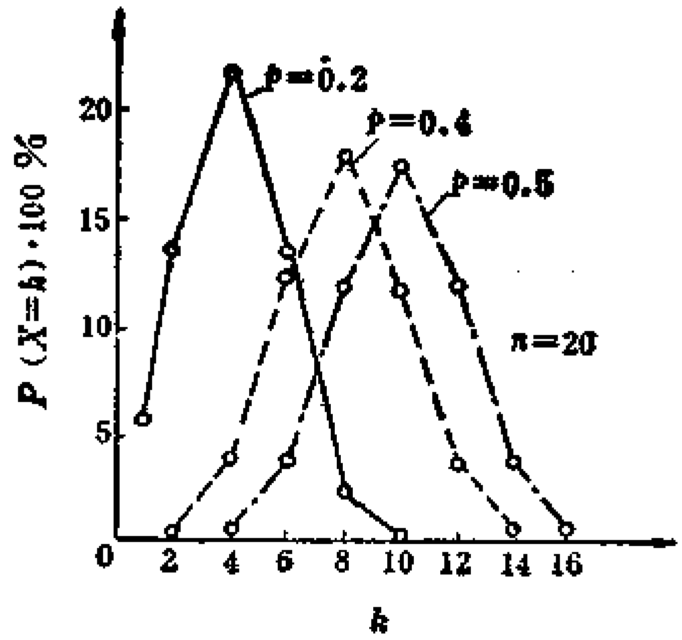


图1·4-5 二项分布图

2. 泊松分布 泊松分布作为二项分布的极限而出现。

在二项分布中，当n很大且p近于0时，这种条件下的随机变量的分布函数，称为泊松分布。记作：

$$P(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

式中 $\lambda = np$。

泊松分布常被用来研究稀有事件的频数，这种事件在每次试验中出现的概率p很小，但试验的次数n又很大。

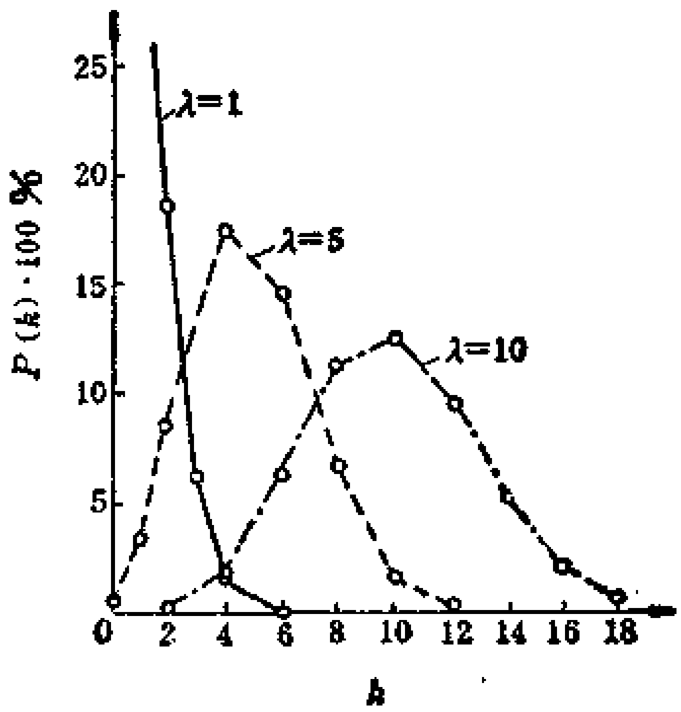


图1·4-6 泊松分布图

3. Γ分布

密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,\ x\leqslant 0\\ \dfrac{\lambda^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

式中 $\lambda>0$，$m>0$均为常数，参数m决定分布的形状。

4. 正态分布(见图1·4-7·8)

1）密度函数与分布函数 密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$(-\infty<x<\infty,\quad \sigma>0)$$

式中 μ和σ分别为正态分布的期望和标准差，均为常数。

相应的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\times dy$$

正态分布也称高斯（Gauss）分布，简记为$N(\mu,\sigma)$。

特别当$\mu=0$，$\sigma=1$时，称为标准正态分布。

正态分布经常作为极限分布而出现，当$n\to\infty$时的二项分布与$\lambda\to\infty$时的泊松分布均趋于正态分布。

2）可加性 n个正态独立随机变量的常系数的线性组合，仍然是正态随机变量。即若

$$Y=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_nX_n$$

此处X_i均值为μ_i，方差为σ_i^2，则Y有均值

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i$$

和方差

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2$$

5. χ^2分布 若Y_1，…，Y_n是均值为μ、方差为σ^2并且相互独立的正态随机变量，则

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

的概率密度函数为

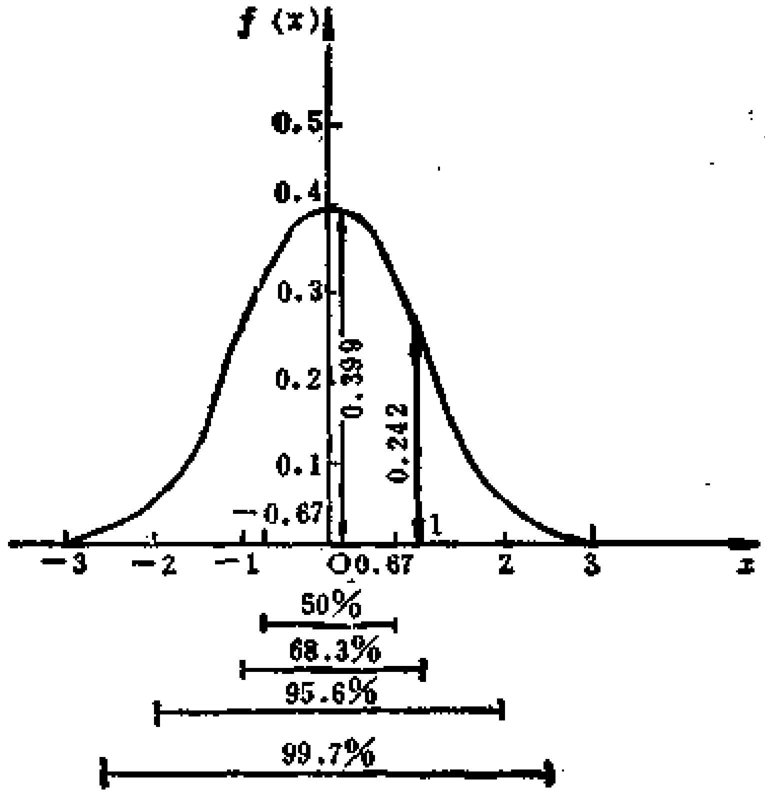


图1·4-7 正态密度函数图

最下一横线表示：在（−3，3）中，曲线下的面积为99.7%，其他横线意义类似，全面积为1。

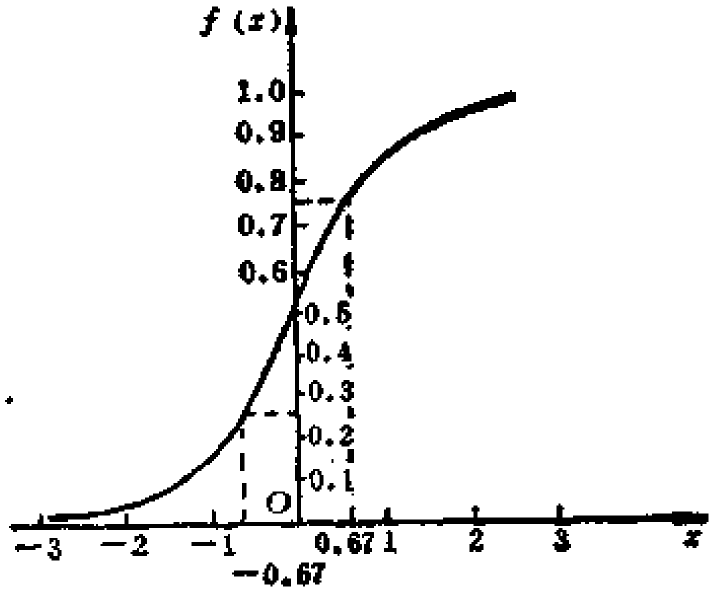


图1·4-8 正态分布函数图

$$f(\chi^2,n)=\begin{cases}0, & \chi^2<0\\ \dfrac{(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\exp\left(-\dfrac{\chi^2}{2}\right), & \chi^2\geqslant 0\end{cases}$$

叫作自由度为n的χ^2分布。虽然χ^2依赖于μ，σ，但其密度却与μ，σ无关。

分布函数为

$$F(\chi^2,n)=P(\chi^2>\chi_0^2)$$

$$=\int_{\chi_0^2}^{\infty}f(\chi^2,n)\,d(\chi^2)$$

$$=\int_{X_\alpha^2}^{\infty}\frac{(X^2)^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\exp\left(-\frac{X^2}{2}\right)$$

$$\times d(X^2) \qquad (X^2\geqslant 0)$$

某些特定自由度的X^2分布的密度函数图形如图1.4-9所示。

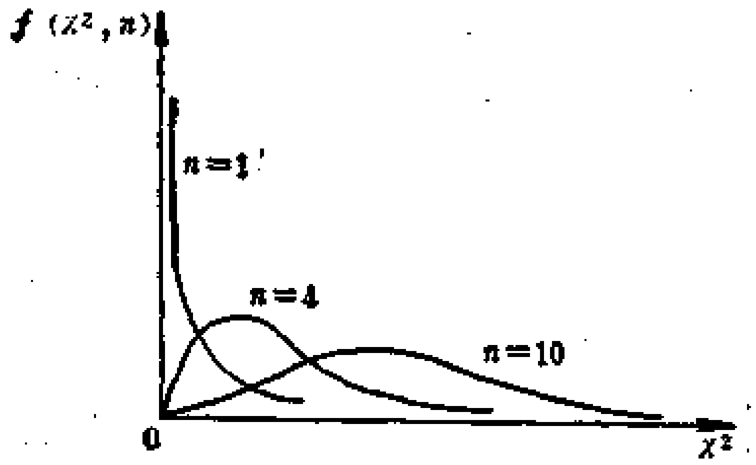


图1·4-9 X^2分布密度函数图

6. 瑞利（Rayleigh）分布

密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$(\sigma>0)$$

7. 马克思威尔（Maxwell）分布 密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{\sigma^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x\geqslant 0\end{cases}$$

8. t分布 若随机变量X、Y相互独立且X服从标准正态分布$N(0, 1)$，Y服从自由度为n的x^2分布，则随机变量

$$t=\frac{\sqrt{n}X}{Y}$$

服从自由度为n的t分布，又称学生（Student）分布。其密度函数为

$$f(t, n)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$(-\infty<t<\infty)$$

某些特定自由度的t分布的密度函数图形如图1·4-10所示。

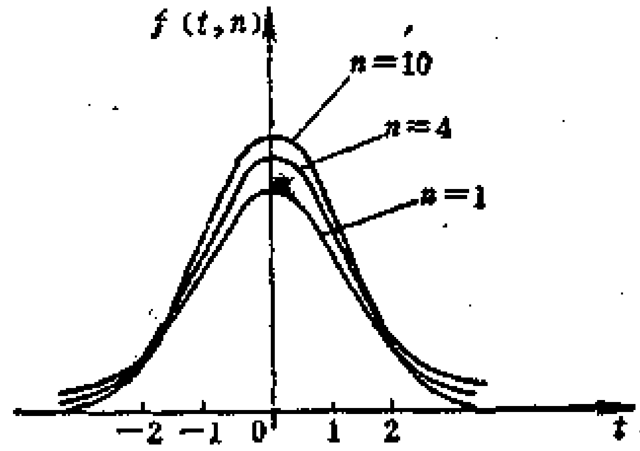


图1·4-10 t分布密度函数图

9. F分布 设随机变量X、Y相互独立且分别服从自由度为m及n的x^2分布，则随机变量

$$F=\frac{X/m}{Y/n}$$

具有自由度为m、n的F分布，其概率密度为

$$f(F, m, n)=\begin{cases}0, & F\leqslant 0\\ \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\\ \times\frac{F^{\frac{m}{2}-1}}{(mF+n)^{\frac{m+n}{2}}}, & F>0\end{cases}$$

某些自由度的F分布的密度函数图形如图1·4-11所示。

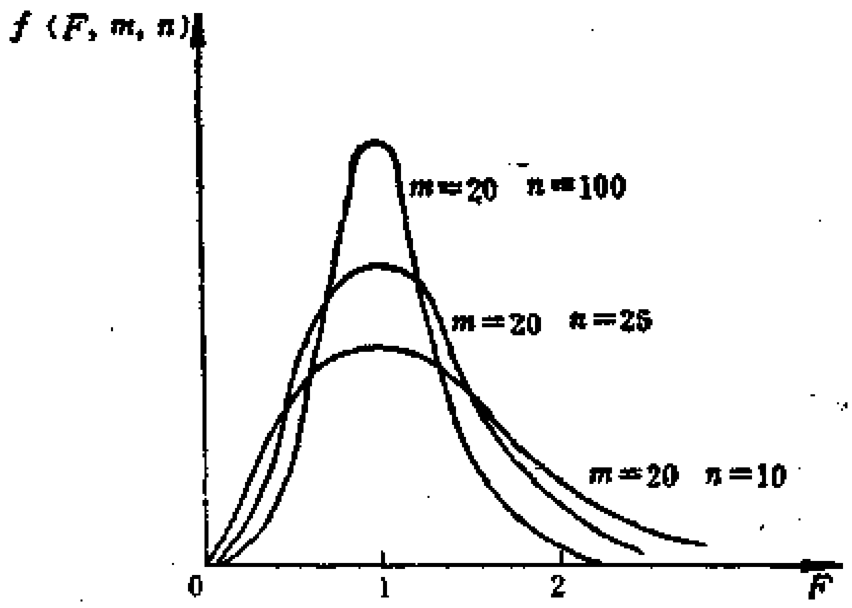


图1·4-11 F分布密度函数图

14·8·2 几种分布的数字特征及特征函数（见表1·4-11）

14·9 抽样分布

14·9·1 基本概念

表1·4-11 几种分布的数字特征及特征函数

分布名称	数学期望$E(X)$	方 差 $D(X)$	特征函数 $C(u)$
二项分布	np	$np(1-p)$	$(pe^{ju}+1-p)^n$
泊松分布	λ	λ	$e^{\lambda(e^{ju}-1)}$
Γ分布	$m\lambda^{-1}$	$m\lambda^{-2}$	$\left(1-\frac{ju}{\lambda}\right)^{-m}$
正态分布	μ	σ^2	$e^{j\mu u-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}$
χ^2分布	n	$2n$	$(1-2ju)^{-\frac{n}{2}}$
t分布	0 ，$n>1$	$\frac{n}{n-2}$，$n>2$	
F分布	$\frac{n}{n-2}$，$n>2$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ $n>4$	

1. 个体 在统计学中，把可以对其进行一系列观测的一件具体的或一般的物体、一定数量的物质；或是一个定性或定量的观测值称为个体。

2. 总体（母体） 所考虑的个体的全体叫作总体（或母体）；总体中每一有明确定义的部分称为子总体。

3. 样本（子样） 将取自总体中的一个或多个个体，用于提供总体的信息，并作为可能作出对总体（或产生总体的过程）的某种判定基础，称为样本（或子样）。样本中所包含的抽样单位数目叫作样本的容量（或大小）。

4. 统计量 样本观测的函数，这种函数中除样本外不直接含有总体分布的未知因素。

14·9·2 样本的数字特征及其分布

1. 样本的数字特征 对包含n个独立观测值x_1，…，x_n的一个样本，其数字特征主要有以下几种。

（1）算术平均值（均值）

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

（2）方差

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

通常取

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

称为样本修正方差。

（3）标准差

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

或

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

（4）q阶原点矩

$$a_q=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^q$$

（5）q阶中心矩

$$b_q=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^q$$

2. 样本数字特征的分布

（1）设总体X的数学期望和方差分别为$E(X)=\mu$和$D(X)=\sigma^2$，则样本$x_1,\cdots,x_n$的均值$\bar{x}$的数学期望和方差分别为

$$E(\bar{x})=\mu,\quad D(\bar{x})=\frac{1}{n}\sigma^2$$

而样本方差 S^2 的数学期望为

$$E(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

样本修正方差的数学期望为 σ^2。

（2）设总体 X 的特征函数为 $C(u)$，则样本 $x_1,\cdots,x_n$ 的均值 $\bar{x}$ 的特征函数为

$$C_1(u)=\left[C\left(\frac{u}{n}\right)\right]^n$$

于是，若总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma)$，即

$$C(u)=\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}u^2+j\mu u\right]$$

则样本均值 $\bar{x}$ 的特征函数为

$$C_1(u)=\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2u^2+j\mu u\right]$$

即 $\bar{x}$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$。

（3）设总体 X 为一般分布，但方差 $\sigma^2\neq 0$ 且有穷，则 $\bar{x}$ 为 $\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ 渐近正态的，即

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

（4）设 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma)$，$x_1,\cdots,x_n$ 为取自 X 的一个容量为 n 的随机样本，则 $\bar{x}$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$，$nS^2/\sigma^2$ 服从自由度为（$n-1$）的 x^2 分布，而且 $\bar{x}$ 与 S^2 互相独立。

（5）设 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma)$，则随机变量

$$T=\sqrt{n-1}\,\frac{\bar{x}-\mu}{S}$$

服从自由度为（$n-1$）的 t 分布。

（6）设总体 X，Y 分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma)$，$N(\mu_2,\sigma)$，$x_1,\cdots,x_{n_1}$ 和 $y_1,\cdots,y_{n_2}$ 分别是 X，Y 的样本，而且互相独立，记

$$\bar{x}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_i\quad \bar{y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}y_j$$

$$S_1^2=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2$$

$$S_2^2=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(y_j-\bar{y})^2$$

则

$\frac{(n_2-1)n_1S_1^2}{(n_1-1)n_2S_2^2}$ 服从自由度为（n_1-1，n_2-1）的 F 分布；

$$\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\cdot\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{n_1S_1^2+n_2S_2^2}}$$

服从自由度为（n_1+n_2-2）的 t 分布。

14·10 参数估计

估计是根据样本观测值估计总体参数值的一种操作过程；操作过程的结果称为估计值；用于估计总体参数的统计量称为估计量。

（1）估计量的偏倚　参数估计量的期望与参数真值的偏差。

（2）无偏估计量　参数的一种估计量，它的期望值等于该参数的真值。

14·10·1 点估计

设 $x_1,\cdots,x_n$ 是从总体中抽取的一个简单随机样本。

（1）总体均值（或概率分布期望）的估计

$$\mu=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$\bar{x}$ 是总体均值的一个无偏估计量。

（2）总体（或概率分布）方差的估计

$$\sigma^2=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

S^2 是总体方差的一个无偏估计量。

（3）总体（或概率分布）标准差的估计

$$\sigma=\sqrt{S^2}=S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

为计算方便，可采用

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]}$$

但这个估计量并不是无偏的。

14·10·2 区间估计

区间估计是用有确切意义的数字表达某个总体

未知参数的真值落在一定区间之内的"可靠程度"。要估计的是以某种概率（$1-\alpha$）包含总体参数真值的随机区间$[T_1, T_2]$。其中，给出上述区间下限T_1和上限T_2的方法称为双侧区间估计，仅估计下限T_1或上限T_2的方法称为单侧区间估计；概率（$1-\alpha$）叫做置信水平。

1. 双侧置信区间　设θ是待估计的总体一个未知参数，由样本确定的两个统计量为$T_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$T_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若对于给定值$\alpha$（$0<\alpha<1$）满足

$$P(T_1 \leqslant \theta \leqslant T_2) = 1-\alpha$$

则称$[T_1, T_2]$为θ的双侧（$1-\alpha$）置信区间。

2. 单侧置信区间　满足

$$P(T \geqslant \theta) = 1-\alpha$$

或

$$P(T \leqslant \theta) = 1-\alpha$$

即从θ的最小可能值至T的区间或从T至θ的最大可能值之间的区间，称为θ的单侧（$1-\alpha$）置信区间。

14·11　假设检验

14·11·1　假设检验的概念

1. 统计检验　为了确定一个或多个总体分布的假设应该予以拒绝还是予以接受的程序。

对随机变量的数字特征或分布函数中的参数提出假设并进行检验的问题称为参数假设检验问题；对总体分布函数的表达式或随机变量间的独立性与相关性提出假设并进行检验的问题称为非参数假设检验问题。

所采取的决定，取决于从总体取得样本观测值所计算的一个或多个适当统计量的数值。由于统计量的值是随机变化的，因此当做决定时，有犯错误的风险。重要的是，一个检验通常总有一个先验的条件，即必须满足某些假设，而且这些假设是检验的基础。

2. 原假设　根据检验的结果准备予以接受或予以拒绝的假设，以H_0表示。

3. 备择假设　对原假设不相容的假设，以H_1表示。

4. 显著水平　当原假设正确时，而被否定的概率的最大值，记为α。又称犯第Ⅰ类错误或弃真错误的风险率。

14·11·2　假设检验的一般步骤

（1）假设总体具有某种属性，把此假设称为原假设，记作H_0。

（2）选取用于检验的统计量，并确定其分布。

（3）选定显著水平α，并查相应概率分布表找出临界值，从而确定否定域。

（4）由样本计算统计量之值。

（5）判断　若统计量之值在否定区域内，则以α的风险率否定原假设H_0，否则接受H_0。

14·11·3　参数假设检验举例

在统计中最常见的参数假设检验问题是对总体数学期望或方差性质的检验问题。一般情况下假定总体服从正态分布$N(\mu, \sigma)$。在非正态情况下，可以利用中心极限定理假定大样本均渐近服从正态分布并进行近似检验。

1. 对于数学期望的检验问题

（1）设总体X服从$N(\mu, \sigma)$，方差$D(X)=\sigma^2$已知。

假设H_0：$\mu=\mu_0$（μ_0为常数）。

统计量：$T=\sqrt{n}\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}$～标准正态分布$N(0, 1)$。

否定域：$|T|>t_\alpha$

临界值的确定$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{t_\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$

$$=1-\frac{\alpha}{2}$$

（查正态分布表确定t_α）

（2）设总体X服从$N(\mu, \sigma)$，方差$D(X)=\sigma^2$已知。

H_0：$\mu \leqslant \mu_0$

统计量：$T=\sqrt{n}\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}$～$N(0, 1)$

否定域：$T \geqslant t_\alpha$

临界值的确定　$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{t_\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$

$$=1-\alpha$$

（3）设总体X服从$N(\mu, \sigma)$，方差未知。

H_0：$\mu=\mu_0$

统计量：$T=\sqrt{n-1}\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{S}$～自由度为（$n-1$）的$t$分布。

否定域：$|T|\geqslant t_\alpha$

临界值的确定 $\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} f(t, n-1)\mathrm{d}t = 1-\alpha$

（查 t 分布表确定 t_α）

（4）设总体 X，Y 分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2)$，对应的样本观测值分别为 x_1，…，x_{n1} 和 y_1，…，y_{n2}。总体方差 σ_1^2 和 σ_2^2 已知。

H_0：$\mu_1=\mu_2$

统计量：$T=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

否定域：$|T|>t_\alpha$

临界值的确定 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y = 1-\dfrac{\alpha}{2}$

（5）设总体 X，Y 分别服从 $N(\mu_1,\sigma)$ 和 $N(\mu_2,\sigma)$，但总体方差 σ^2 未知。

H_0：$\mu_1=\mu_2$

统计量：$T=\sqrt{\dfrac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\times\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{n_1S_1^2+n_2S_2^2}}\sim$ 自由度为 (n_1+n_2-2) 的 t 分布。

否定域：$|T|\geqslant t_\alpha$

临界值的确定 $\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} f(t, n_1+n_2-2)\mathrm{d}t = 1-\alpha$

（6）设总体 X，Y 分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2)$，方差 σ_1^2 和 σ_2^2 未知，且 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$。设两样本容量 $n_1<n_2$

H_0：$\mu_1=\mu_2$

统计量：$T=\sqrt{n_1-1}\,\dfrac{\bar{z}}{S}\sim$ 自由度为 (n_1-1) 的 t 分布。

式中 $\bar{z}=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} z_i$，

$$S^2=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(z_i-\bar{z})^2,$$

$$z_i=x_i-\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}y_i+\frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\sum_{k=1}^{n_1}y_k-\frac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n_2}y_k$$

$(i=1, \cdots, n_1)$

否定域：$|T|\geqslant t_\alpha$

临界值的确定 $\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} f(t, n_1-1)\mathrm{d}t = 1-\alpha$

2. 对于方差的检验问题

（1）设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma)$，数学期望 $E(X)=\mu$ 已知。

H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2$（σ_0 为常数）

统计量：$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\sim$ 自由度为 n 的 χ^2 分布。

否定域：$\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$

临界值的确定 $\int_{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} f(\chi^2, n)\mathrm{d}(\chi^2)=\dfrac{\alpha}{2}$

或 $\int_{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} f(\chi^2, n)\mathrm{d}(\chi^2)=1-\dfrac{\alpha}{2}$

（查 χ^2 分布表确定）

（2）设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma)$，数学期望 μ 已知。

H_0：$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$

统计量：$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\sim$ 自由度为 n 的 χ^2 分布。

否定域：$\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha$

临界值的确定 $\int_{\chi^2_\alpha}^{\infty} f(\chi^2, n)\mathrm{d}(\chi^2)=\alpha$

（3）设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma)$，μ 未知。

H_0: $\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$

统计量：$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$～自由度为$(n-1)$的$\chi^2$分布。

否定域：$\chi^2 \geqslant \chi_\alpha^2$

临界值的确定 $\int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} f(\chi^2, n-1) d(\chi^2) = \alpha$

（4）设总体X，Y分别服从$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，对应样本观测值分别为$x_1, \cdots, x_{n_1}$和$y_1, \cdots, y_{n_2}$，两个总体的数学期望和方差均未知。

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

统计量：若$n_1 S_1^2/(n_1 - 1) > n_2 S_2^2/(n_2 - 1)$，则记$n_大 = n_1$，$S_大^2 = S_1^2$，$n_小 = n_2$，$S_小^2 = S_2^2$；否则，记$n_大 = n_2$，$S_大^2 = S_2^2$，$n_小 = n_1$，$S_小^2 = S_1^2$，其中$S_1^2$和$S_2^2$为样本方差。统计量为

$$F = \frac{\frac{n_大 S_大^2}{n_大 - 1}}{\frac{n_小 S_小^2}{n_小 - 1}}$$～自由度为$(n_大 - 1, n_小 - 1)$的F分布。

否定域：$F > F_\alpha$

临界值的确定 $\int_0^{F_\alpha} f(F, n_大 - 1, n_小 - 1) dF = 1 - \alpha$

上述问题的否定域也可规定为$F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}$或$F > F_{\frac{\alpha}{2}}$，其中$F_{1-\frac{\alpha}{2}}$与$F_{\frac{\alpha}{2}}$由下式确定：

$$\int_{F_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} f(F, n_大 - 1, n_小 - 1) dF = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$\int_{F_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} f(F, n_大 - 1, n_小 - 1) dF = \frac{\alpha}{2}$$

（查F分布表确定）

14·12 回归与相关

14·12·1 回归

1．回归分析 回归分析的任务是对大小为n的样本观测值组(x_i, y_i) $(i = 1, \cdots, n)$建立随机自变量X与随机因变量Y之间的依赖关系$y = y(x) + e$，其中e是随机变动误差项。为此，提出以下要求：观测值(x_i, y_i)总是落在研究对象的第i个元素的近旁，并把$X = x$时，随机变量Y的期望值当作$y(x)$，假定Y服从$N(y(x), \sigma)$的正态分布。通常选取$y(x)$为k次多项式：$y(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$，它的系数$a_j$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$是待定的，由高斯最小二乘法可以算出a_j的估计值$\hat{a}_j$。

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - y(x_i)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=0}^{k} a_j x_i^j\right)^2$$

$$= g(a_0, a_1, \cdots, a_k)$$

令偏导数$\partial g / \partial a_i = 0$，可得到关于$k+1$个未知数（多项式的系数）的$k+1$个线性方程，可以用解线性方程组的方法求得$a_j$的估计值$\hat{a}_j$。

$y(x)$叫作Y对X的回归，$y(x)$随x变化所形成的曲线，称为Y对X的回归曲线。

2．回归直线 在线性情况下$(k = 1, y = a_0 + a_1 x)$，可推出用均值表示的回归直线的回归系数：

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x}$$

或 $$y - \bar{y} = \hat{a}_1 (x - \bar{x})$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

方差 $$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

$$S_y^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

协方差

$$S_{xy}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-n\bar{x}\bar{y}\right)$$

于是，$\hat{a}_1=S_{xy}/S_x^2$

当所有观测点都落在回归直线上时，$S_{xy}^2=S_x^2\cdot S_y^2$ 系数 $\hat{a}_0$ 和 $\hat{a}_1$ 是理论直线 $Y=a_0+a_1X$（X 与 Y 为随机变量）的系数估计值，在正态分布假定下，对于给定的置信水平，可以确定 $\hat{a}_0$ 与 $\hat{a}_1$ 的置信区间。

14·12·2　相关

若没有显然的根据可以说随机变量 Y 与取为独立变量 X 之间有函数依赖关系，则相关分析对于假定的依赖程度提供检验的指标。

相关系数　两个随机变量或两组成对观测值之间的线性依赖程度可用相关系数表示：

$$\rho=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$=\frac{S_{xy}}{S_xS_y}\qquad(-1\leqslant\rho\leqslant 1)$$

当 $|\rho|=1$ 时，意味着这两个随机变量或两组成对的观测值之间存在着精确的线性关系，当 $|\rho|=0$ 时，表示两随机变量互不相关，毫无线性关系。

14·13　随机过程

随机过程是随机现象的演变过程，是随机变量的集合 $\{X_t,\ t\in T\}$，下标 t 通常表示时间。对每一随机过程，可以象对随机变量一样定义它的各阶矩和多维分布函数及概率密度。

n 维分布函数

$$F_n(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})=P(X_{t_1}<x_{t_1},\cdots,X_{t_n}<x_{t_n})$$

数学期望

$$E(X_t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_tf_1(x_t)\mathrm{d}x_t=\mu_t$$

方差

$$D(X_t)=E\{[X_t-E(X_t)]^2\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x_t-\mu_t)^2f_1(x_t)\mathrm{d}x_t$$

二阶矩

$$E(X_t,X_{t+\tau})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_tx_{t+\tau}f_2\times(x_t,x_{t+\tau})\mathrm{d}x_t\mathrm{d}x_{t+\tau}$$

如果随机过程的分布函数或概率密度不随时间的推移而改变，则此过程是平稳随机过程。例如，对于任意的 n 和 τ，平稳随机过程的 n 维密度函数满足

$$f_n(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})=f_n(x_{t_1+\tau},\ \cdots,\ x_{t_n+\tau})$$

如果对于任意的 n 维分布服从 n 维正态分布，则过程称为高斯过程或正态过程。

14·13·1　相关函数

如果随机过程的二阶矩存在，并且不依赖于 t，则称这过程为弱平稳过程。

$$B(t,t+\tau)=E(X_t,X_{t+\tau})=B(\tau)$$

$B(\tau)$ 称为弱平稳过程的相关函数。

相关函数的性质：

（1）$B(0)\geqslant 0$

（2）$|B(\tau)|\leqslant B(0)$

（3）$B(-\tau)=B(\tau)$

如果弱平稳过程 $\{X_t,\ t\in T\}$ 满足

$$\lim_{\tau\to 0}E(|X_{t+\tau}-X_t|^2)=0$$

则称为均方连续的。

14·13·2　谱密度函数

如 $B(\tau)$ 是均方连续弱平稳过程的相关函数，则

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau x}\mathrm{d}F(x)$$

上式称为相关函数的谱展式，$F(x)$ 称为过程的谱函数。

如果存在非负函数 $f(x)$，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(y)\mathrm{d}y$$

则称 $f(x)$ 为过程的谱密度。

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{j\tau x}dx$$

当 $\int_{-\infty}^{\infty}|B(\tau)|d\tau<\infty$ （绝对可积）时，有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{-j\tau x}d\tau$$

即相关函数 $B(\tau)$ 与谱密度函数 $f(x)$ 互为傅里叶变换。

15 逻辑代数

15·1 基本逻辑运算及符号

逻辑代数是以命题为元的布尔代数。命题是用以表达一个判断的语句，根据判断为真或为假，相应的命题称为真命题或假命题。分别用1与0表示真命题与假命题，这时1与0称为真假值。

设 A，B 是命题，则对于逻辑变量的二元运算，基本有：

（1）与（合取） $A\wedge B$

（2）或（析取） $A\vee B$

（3）非（否定） $\neg A$

三种基本运算的真假表见表1·4-12、表1·4-13与表1·4-14。

表1·4-12 逻辑与真假表

A	B	$A\wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表1·4-13 逻辑或真假表

A	B	$A\vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

三种运算的约定强弱次序为 $\neg$，$\wedge$，$\vee$。

表1·4-14 逻辑非真假表

A	$\neg A$
0	1
1	0

15·2 逻辑运算的基本性质

（1）交换律

$A\vee B=B\vee A$

$A\wedge B=B\wedge A$

（2）结合律

$A\vee(B\vee C)=(A\vee B)\vee C$

$A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C$

（3）分配律

$A\wedge(B\vee C)=A\wedge B\vee A\wedge C$

$A\vee B\wedge C=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

（4）相容律

$A\vee B=B$，当且仅当 $A\wedge B=A$

15·3 恒等式

（1） $A\vee 0=A$

（2） $A\wedge 0=0$

（3） $A\vee 1=1$

（4） $A\wedge 1=A$

（5） $A\vee A=A$

（6） $A\wedge A=A$

（7） $\neg(\neg A)=A$

（8） $A\vee\neg A\wedge B=A\vee B$

（9） $A\vee\neg A=1$

（10） $A\wedge\neg A=0$

（11） $A\vee B=\neg(\neg A\wedge\neg B)$

（12） $A\wedge B=\neg(\neg A\vee\neg B)$

15·4 基本定理

（1）吸收律

$A\wedge(A\vee B)=A$

$A\vee A\wedge B=A$

（2）摩根定理

$\neg(A\vee B)=\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)=\neg A\vee\neg B$

16 数学表

16·1 二项式展开系数表

表1·4-15　二项式展开的系数

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

注：表中每一个数都是位于它上面的数与它上面左侧的数之和（见直方框内：36+84=120）。用这种方法可把此表无限扩充。

16·2　Γ函数表

表1·4-16　Γ函数表

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$$

n	Γ(n)	n	Γ(n)	n	Γ(n)	n	Γ(n)
1.00	1.00000	1.25	0.90640	1.50	0.88623	1.75	0.91906
1.01	0.99433	1.26	0.90440	1.51	0.88659	1.76	0.92137
1.02	0.98884	1.27	0.90250	1.52	0.88704	1.77	0.92376
1.03	0.98355	1.28	0.90072	1.53	0.88757	1.78	0.92623
1.04	0.97844	1.29	0.89904	1.54	0.88818	1.79	0.92877
1.05	0.97350	1.30	0.89747	1.55	0.88887	1.80	0.93138
1.06	0.96874	1.31	0.89600	1.56	0.88964	1.81	0.93408
1.07	0.96415	1.32	0.89464	1.57	0.89049	1.82	0.93685
1.08	0.95973	1.33	0.89338	1.58	0.89142	1.83	0.93969
1.09	0.95546	1.34	0.89222	1.59	0.89243	1.84	0.94261
1.10	0.95135	1.35	0.89115	1.60	0.89352	1.85	0.94561
1.11	0.94740	1.36	0.89018	1.61	0.89468	1.86	0.94869
1.12	0.94359	1.37	0.88931	1.62	0.89592	1.87	0.95184
1.13	0.93993	1.38	0.88854	1.63	0.89724	1.88	0.95507
1.14	0.93642	1.39	0.88785	1.64	0.89864	1.89	0.95838
1.15	0.93304	1.40	0.88726	1.65	0.90012	1.90	0.96177
1.16	0.92980	1.41	0.88676	1.66	0.90167	1.91	0.96523
1.17	0.92670	1.42	0.88636	1.67	0.90330	1.92	0.96877
1.18	0.92373	1.43	0.88604	1.68	0.90550	1.93	0.97240
1.19	0.92089	1.44	0.88581	1.69	0.90678	1.94	0.97610
1.20	0.91817	1.45	0.88566	1.70	0.90864	1.95	0.97988
1.21	0.91558	1.46	0.88560	1.71	0.91057	1.96	0.98374
1.22	0.91311	1.47	0.88563	1.72	0.91258	1.97	0.98768
1.23	0.91075	1.48	0.88575	1.73	0.91467	1.98	0.99171
1.24	0.90852	1.49	0.88595	1.74	0.91683	1.99	0.99581
						2.00	1.00000

16·3 泊松分布数值表

表1·4-17 泊松分布数值表

$$P_k(\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{K!}$$

k	λ							
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812	0.496585	0.449329
1	0.090484	0.163746	0.222245	0.268128	0.303265	0.329287	0.347610	0.359463
2	0.004524	0.016375	0.033337	0.053626	0.075816	0.098786	0.121663	0.143785
3	0.000151	0.001092	0.003334	0.007150	0.012636	0.019757	0.028388	0.038343
4	0.000004	0.000055	0.000250	0.000715	0.001580	0.002964	0.004968	0.007669
5	—	0.000002	0.000015	0.000057	0.000158	0.000356	0.000696	0.001227
6	—	—	0.000001	0.000004	0.000013	0.000036	0.000081	0.000164
7	—	—	—	—	0.000001	0.000003	0.000008	0.000019
8	—	—	—	—	—	—	0.000001	0.000002

k	λ							
	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
0	0.406570	0.367879	0.223130	0.135335	0.082085	0.049787	0.030197	0.018316
1	0.365913	0.367879	0.334695	0.270671	0.205212	0.149361	0.105691	0.073263
2	0.164661	0.183940	0.251021	0.270671	0.256516	0.224042	0.184959	0.146525
3	0.049398	0.061313	0.125510	0.180447	0.213763	0.224042	0.215785	0.195367
4	0.011115	0.015328	0.047067	0.090224	0.133602	0.168031	0.188812	0.195367
5	0.002001	0.003066	0.014120	0.036089	0.066801	0.100819	0.132169	0.156293
6	0.000300	0.000511	0.003530	0.012030	0.027834	0.050409	0.077098	0.104196
7	0.000039	0.000073	0.000756	0.003437	0.009941	0.021604	0.038549	0.059540
8	0.000004	0.000009	0.000142	0.000859	0.003106	0.008102	0.016865	0.029770
9	—	0.000001	0.000042	0.000191	0.000863	0.002701	0.006559	0.013231
10	—	—	0.000004	0.000038	0.000216	0.000810	0.002296	0.005292
11	—	—	—	0.000007	0.000049	0.000221	0.000730	0.001925
12	—	—	—	0.000001	0.000010	0.000055	0.000213	0.000642
13	—	—	—	—	0.000002	0.000013	0.000057	0.000197
14	—	—	—	—	—	0.000003	0.000014	0.000056
15	—	—	—	—	—	0.000001	0.000003	0.000015
16	—	—	—	—	—	—	0.000001	0.000004
17	—	—	—	—	—	—	—	0.000001

k	λ						
	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.011109	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123	0.000045
1	0.049990	0.033690	0.014873	0.006383	0.002684	0.001111	0.000454
2	0.112479	0.084224	0.044618	0.022341	0.010735	0.004998	0.002270
3	0.168718	0.140374	0.089235	0.052129	0.028626	0.014994	0.007567
4	0.189808	0.175467	0.133853	0.091226	0.057252	0.033737	0.018917
5	0.170827	0.175467	0.160623	0.127717	0.091604	0.060727	0.037833
6	0.128120	0.146223	0.160623	0.149003	0.122138	0.091090	0.063055
7	0.082363	0.104445	0.137677	0.149003	0.139587	0.117116	0.090079
8	0.046329	0.065278	0.103258	0.130377	0.139587	0.131756	0.112599
9	0.023165	0.036266	0.068838	0.101405	0.124077	0.131756	0.125110
10	0.010424	0.018133	0.041303	0.070983	0.099262	0.118580	0.125110
11	0.004264	0.008242	0.022529	0.045171	0.072190	0.097020	0.113736
12	0.001599	0.003434	0.011264	0.026350	0.048127	0.072765	0.094780
13	0.000554	0.001321	0.005199	0.014188	0.029616	0.050376	0.072908
14	0.000178	0.000472	0.002228	0.007094	0.016924	0.032384	0.052077
15	0.000053	0.000157	0.000891	0.003311	0.009026	0.019431	0.034718
16	0.000015	0.000049	0.000334	0.001448	0.004513	0.010930	0.021699
17	0.000004	0.000014	0.000118	0.000596	0.002124	0.005786	0.012764
18	0.000001	0.000004	0.000039	0.000232	0.000944	0.002893	0.007091
19	—	0.000001	0.000012	0.000085	0.000397	0.001370	0.003732
20	—	—	0.000004	0.000030	0.000159	0.000617	0.001866
21	—	—	0.000001	0.000010	0.000061	0.000264	0.000889
22	—	—	—	0.000003	0.000022	0.000108	0.000404
23	—	—	—	0.000001	0.000008	0.000042	0.000176
24	—	—	—	—	0.000003	0.000016	0.000073
25	—	—	—	—	0.000001	0.000006	0.000029
26	—	—	—	—	—	0.000002	0.000011
27	—	—	—	—	—	0.000001	0.000004
28	—	—	—	—	—	—	0.000001
29	—	—	—	—	—	—	0.000001

16·4 正态分布函数与密度函数数值表

表1·4-18 正态分布函数与密度函数数值表

x	$f(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$	$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$	x	$f(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$	$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
0.00	0.39894	0.50000	2.55	0.01545	$0.9^{2}4614$
0.05	0.39844	0.51994	2.60	0.01358	$0.9^{2}5339$
0.10	0.39695	0.53983	2.65	0.01191	$0.9^{2}5975$
0.15	0.39448	0.55962	2.70	0.01042	$0.9^{2}6533$
0.20	0.39104	0.57926	2.75	$0.0^{2}9094$	$0.9^{2}7020$
0.25	0.38667	0.59871			
0.30	0.38139	0.61791	2.80	$0.0^{2}7915$	$0.9^{2}7445$
0.35	0.37524	0.63683	2.85	$0.0^{2}6873$	$0.9^{2}7814$
0.40	0.36827	0.65542	2.90	$0.0^{2}5953$	$0.9^{2}8134$
0.45	0.36053	0.67364	2.95	$0.0^{2}5143$	$0.9^{2}8411$
0.50	0.35207	0.69146	3.00	$0.0^{2}4432$	$0.9^{2}8650$
0.55	0.34294	0.70884	3.05	$0.0^{2}3810$	$0.9^{2}8856$
0.60	0.33322	0.72575	3.10	$0.0^{2}3267$	$0.9^{3}0324$
0.65	0.32297	0.74215	3.15	$0.0^{2}2794$	$0.9^{3}1836$
0.70	0.31225	0.75804	3.20	$0.0^{2}2384$	$0.9^{3}3129$
0.75	0.30114	0.77337	3.25	$0.0^{2}2029$	$0.9^{3}4230$
0.80	0.28969	0.78814	3.30	$0.0^{2}1723$	$0.9^{3}5166$
0.85	0.27798	0.80234	3.35	$0.0^{2}1459$	$0.9^{3}5959$
0.90	0.26609	0.81594	3.40	$0.0^{2}1232$	$0.9^{3}6631$
0.95	0.25406	0.82894	3.45	$0.0^{2}1038$	$0.9^{3}7197$
1.00	0.24197	0.84134	3.50	$0.0^{3}8727$	$0.9^{3}7674$
1.05	0.22988	0.85314	3.55	$0.0^{3}7317$	$0.9^{3}8074$
1.10	0.21785	0.86433	3.60	$0.0^{3}6119$	$0.9^{3}8409$
1.15	0.20594	0.87493	3.65	$0.0^{3}5105$	$0.9^{3}8689$
1.20	0.19419	0.88493	3.70	$0.0^{3}4248$	$0.9^{3}8922$
1.25	0.18265	0.89435	3.75	$0.0^{3}3526$	$0.9^{4}1158$
1.30	0.17137	0.90320	3.80	$0.0^{3}2919$	$0.9^{4}2765$
1.35	0.16038	0.91149	3.85	$0.0^{3}2411$	$0.9^{4}4094$
1.40	0.14973	0.91924	3.90	$0.0^{3}1987$	$0.9^{4}5190$
1.45	0.13943	0.92647	3.95	$0.0^{3}1633$	$0.9^{4}6092$
1.50	0.12952	0.93319	4.00	$0.0^{3}1338$	$0.9^{4}6833$
1.55	0.12001	0.93943	4.05	$0.0^{3}1094$	$0.9^{4}7439$
1.60	0.11092	0.94520	4.10	$0.0^{4}8926$	$0.9^{4}7934$
1.65	0.10226	0.95053	4.15	$0.0^{4}7263$	$0.9^{4}8338$
1.70	0.09405	0.95543	4.20	$0.0^{4}5894$	$0.9^{4}8665$
1.75	0.08628	0.95994	4.25	$0.0^{4}4772$	$0.9^{4}8931$
1.80	0.07895	0.96407	4.30	$0.0^{4}3854$	$0.9^{5}1460$
1.85	0.07206	0.96784	4.35	$0.0^{4}3104$	$0.9^{5}3193$
1.90	0.06562	0.97128	4.40	$0.0^{4}2494$	$0.9^{5}4587$
1.95	0.05959	0.97441	4.45	$0.0^{4}1999$	$0.9^{5}5706$
2.00	0.05399	0.97725	4.50	$0.0^{4}1598$	$0.9^{5}6602$
2.05	0.04879	0.97982	4.55	$0.0^{4}1275$	$0.9^{5}7318$
2.10	0.04398	0.98214	4.60	$0.0^{4}1014$	$0.9^{5}7888$
2.15	0.03955	0.98422	4.65	$0.0^{5}8047$	$0.9^{5}8340$
2.20	0.03547	0.98610	4.70	$0.0^{5}6370$	$0.9^{5}8699$
2.25	0.03174	0.98778	4.75	$0.0^{5}5030$	$0.9^{5}8983$
2.30	0.02833	0.98928	4.80	$0.0^{5}3961$	$0.9^{6}2067$
2.35	0.02522	$0.9^{2}0613$	4.85	$0.0^{5}3112$	$0.9^{6}3827$
2.40	0.02239	$0.9^{2}1802$	4.90	$0.0^{5}2439$	$0.9^{6}5208$
2.45	0.01984	$0.9^{2}2857$	4.95	$0.0^{5}1907$	$0.9^{6}6289$
2.50	0.01753	$0.9^{2}3790$	5.00	$0.0^{5}1487$	$0.9^{6}7133$

注：$0.0^{2}9094 = 0.009094$　　$0.9^{3}0324 = 0.9990324$

$F(-x) = 1 - F(x)$

16·5 X^2分布数值表

本表列出了给定的α和n所对应的X_α^2值。

表1·4-19 X^2分布数值表

$$\int_{X_\alpha^2}^{\infty} f(X^2, n)\,d(X^2) = \alpha$$

n	α = 0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	n
1	0.0^3155	0.0^3628	0.0^2393	0.0158	0.0642	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.828	1
2	0.0201	0.0404	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.816	2
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.266	3
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	12.277	18.467	4
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.068	20.515	5
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.458	6
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322	7
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125	8
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877	9
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588	10
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264	11
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909	12
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528	13
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123	14
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697	15
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252	16
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790	17
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312	18
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820	19
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315	20
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797	21
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268	22
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728	23
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179	24
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.618	25
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052	26
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476	27
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.893	28
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.836	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.301	29
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703	30

16·6 t分布数值表

本表列出了给定的α和n所对应的t_α值。

表1·4-20 t分布数值表

$$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} f(t, n)dt = 1 - \alpha \quad (P(|t| > t_\alpha) = \alpha)$$

n	α													n
	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001	
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619	1
2	.142	.289	.445	.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598	2
3	.137	.277	.424	.584	.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924	3
4	.134	.271	.414	.569	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610	4
5	.132	.267	.408	.559	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859	5
6	.131	.265	.404	.553	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	6
7	.130	.263	.402	.549	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.993	3.499	5.405	7
8	.130	.262	.399	.546	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041	8
9	.129	.261	.398	.543	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	9
10	.129	.260	.397	.542	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587	10
11	.129	.260	.396	.540	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437	11
12	.128	.259	.395	.539	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318	12
13	.128	.259	.394	.538	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221	13
14	.128	.258	.393	.537	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140	14
15	.128	.258	.393	.536	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073	15
16	.128	.258	.392	.535	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015	16
17	.128	.257	.392	.534	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965	17
18	.127	.257	.392	.534	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922	18
19	.127	.257	.391	.533	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883	19
20	.127	.257	.391	.533	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850	20
21	.127	.257	.391	.532	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819	21
22	.127	.256	.390	.532	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792	22
23	.127	.256	.390	.532	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767	23
24	.127	.256	.390	.531	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745	24
25	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725	25
26	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707	26
27	.127	.256	.389	.531	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690	27
28	.127	.256	.389	.530	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674	28
29	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659	29
30	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646	30
40	.126	.255	.388	.529	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551	40
60	.126	.254	.387	.527	.679	.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460	60
120	.126	.254	.386	.526	.677	.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373	120
∞	.126	.253	.385	.524	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291	∞

16·7　*F*分布数值表

在 α 分别给定的条件下，本表列出了给定的 m、n 所对应的 F_α 值。

表1·4-21　*F*分布数值表

$$\int_{F_\alpha}^{\infty} f(F, m, n)\mathrm{d}F = \alpha$$

$\alpha = 0.25$

n	m = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	60	∞
1	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.76	9.85
2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.46	3.48
3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.47	2.47
4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.87	1.87
6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.74	1.74
7	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.68	1.68	1.67	1.65	1.65
8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.59	1.58
9	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53
10	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.50	1.48
11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.47	1.45
12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.44	1.42
13	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.42	1.40
14	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.40	1.38
15	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.38	1.36
16	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.43	1.41	1.40	1.36	1.34
17	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.41	1.40	1.39	1.35	1.33
18	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.40	1.39	1.38	1.34	1.32
19	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.38	1.37	1.33	1.30
20	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.32	1.29
21	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.31	1.28
22	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.37	1.36	1.34	1.30	1.28
23	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.30	1.27
24	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.36	1.35	1.33	1.29	1.26
25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.28	1.25
30	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.30	1.26	1.23
40	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.28	1.22	1.19
60	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.25	1.19	1.15
120	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.24	1.22	1.16	1.10
∞	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.22	1.19	1.12	1.00

$\alpha = 0.05$

n	m = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	60	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	252.2	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.48	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.57	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.69	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.43	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.74	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.30	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.01	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.79	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.62	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.49	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	3.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.38	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.30	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.22	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.16	2.07

（续）

α = 0.05

n	m=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	60	∞
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.11	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.06	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.02	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	1.98	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	1.95	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	1.92	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	1.89	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	1.86	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.84	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.82	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.74	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.64	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.53	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.43	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.32	1.00

α = 0.01

n	m=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	60	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6313	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.48	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.32	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.65	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.20	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.06	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	5.82	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.03	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.48	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.08	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	3.78	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.54	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.34	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.18	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.05	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	2.93	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	3.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	2.83	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	2.75	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	4.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.67	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.61	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.55	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.50	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.73	2.45	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.40	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.36	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.21	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.02	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	1.84	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.66	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.47	1.00

参 考 文 献

1 国家标准汇编24 GB3100～3102—86. 北京：中国标准出版社，1988

2 杜荷聪等编. 计量单位及其换算. 北京：计量出版社，1982

3 邮电部北京设计所编. 无线通信常用数据. 北京：人民邮电出版社，1987

4 机械工程手册电机工程手册编辑委员会编. 电气工程师手册 第1卷：常用数据和资料（1）. 北京：机械工业出版社,1987

5 国家技术监督局标准化司政策法规司编. 中华人民共和国标准化法及有关法规汇编. 北京：中国标准出版社，1990

6 王梓坤主编. 常用数学公式大全. 四川：重庆出版社，1991

7 〔美〕A·科恩M·科恩编. 数学手册. 周民强等译. 北京：工人出版社，1987

8 沈永欢等编. 实用数学手册. 北京：科学出版社，1992

9 樊映川等编. 高等数学讲义. 第2版. 北京：人民教育出版社，1964

10 I. N. Bronshtein, K. A. Semendyayev. Handbook of Mathematics. Reinhold Company Inc, New York, 1985

11 Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer. Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1975

12 西安交通大学高等数学教研室编. 复变函数. 北京：人民教育出版社，1979

13 杨曙编. 矢量分析与张量计算. 第二版. 北京：国防工业出版社，1987

14 谢树艺编. 矢量分析与场论. 第二版. 北京：高等教育出版社，1985

15 冯康等编. 数值计算方法. 北京：国防工业出版社，1978

16 胡祖炽，林源渠编. 数值分析. 北京：高等教育出版社，1986

17 关 治，陈景良编. 数值计算方法. 北京：清华大学出版社，1990

18 李树钰等编. 数值计算方法. 天津：天津科学技术出版社，1991

19 王福保等编. 概率论及数理统计. 第二版. 上海：同济大学出版社，1988

20 王梓坤著. 概率论基础及其应用. 北京：科学出版社，1976

21 〔美〕E. C. 乔丹主编. 无线电、电子、计算机和通信技术手册 24：概率和统计学. 胡华旦，侯凤旺主译. 北京：宇航出版社，1990

[Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ]
书名＝电子工程师手册　上册　第１篇　常用资料
作者＝
页数＝１３７
ＳＳ号＝０
出版日期＝